V. A. TRENOGUIN

PROBLEMAS Y EJERCICIOS DE ANALISIS FUNCIONAL

PROBLEMAS Y EJERCICIOS DE ANÁLISIS FUNCIONAL

В.А.Треногин
Б.М.Писаревский
Т.С.Соболева

ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ ПО ФУНКЦИОНАЛЬНОМУ АНАЛИЗУ

Издательство «Наука»
Главная редакция
физико-математической литературы
Москва

V.A.Trenoguin, B.M.Pisarievski, T.S.Sóboleva

PROBLEMAS Y EJERCICIOS DE ANÁLISIS FUNCIONAL

Editorial Mir Moscú

Capítulo 6. Operadores y ecuaciones no lineales en espacios de Banach 131
§ 23. Diferenciación de operadores no lineales 131
§ 24. Principio de aplicaciones contraídas, proceso iterativo de Newton y principio del punto fijo de Schauder 140
§ 25. Operadores implícitos 150

Capítulo 7. Aproximaciones discretas de soluciones de ecuaciones operatorias 155
§ 26. Esquemas aproximados y de diferencias 155
§ 27. Interpolación por los splines 169
§ 28. Esquemas aproximados de Galiorkin 175
§ 29. Método de operadores monótonos 183

Capítulo 8. Elementos de la teoría de extremo y del analisis convexo 192
§ 30. Condiciones necesarias de extremo de una funcional 192
§ 31. Condiciones suficientes de extremo de una funcional 202
§ 32. Funcionales convexas y semicontinuas 208

Respuestas y sugerencias 212
Bibliografía 262
Lista de símbolos matemáticos 264
Indice alfabético 265

Prefacio

El análisis funcional es una de las ramas más importantes de las Matemáticas modernas. Su surgimiento y desarrollo están vinculados con los nombres de eminentes científicos, tales como D. Hilbert, F. Riesz, S. Banach, M. Fréchet, A. Kolmogórov, S. Sóbolev, A. Tíjonov, S. Nikolski, etc. La construcción sistemática de la teoría de operadores en los espacios de Hilbert de dimensión infinita y, más tarde, en los espacios normados lineales (comienzos del siglo XX) puede considerarse como el surgimiento de la creación del análisis funcional.

Una particularidad importante del análisis funcional es su forma abstracta general de considerar problemas del análisis, lo que permite investigar de modo uniforme cuestiones que, al parecer, no tienen nada de común. Precisamente por eso, las ideas, concepciones y los métodos del análisis funcional se reflejan ahora en casi todas las ramas de las matemáticas, agrupándolas en un todo único.

El análisis funcional desempeña un papel importante en la formación matemática moderna del ingeniero investigador que debe aplicar los métodos matemáticos en una rama concreta de la ciencia. Los problemas fundamentales de las matemáticas aplicada y de cálculos se ven claramente expresados en el idioma del análisis funcional.

Ofrecemos el presente compendio de problemas a los estudiantes de las escuelas técnicas superiores, especializados en matemática aplicada. La estructura de la obra y la terminología usada se orientan al manual «Análisis funcional», de V. Trenoguín [25]. No obstante, el compendio está compuesto de modo que el lector pueda utilizar cualquier otro manual de análisis funcional.

Este libro será de utilidad a ingenieros y especialistas en matemática aplicada, durante el estudio del curso del análisis funcional, y a los estudiantes universitarios, en la iniciación de este curso.

El presente compendio refleja la experiencia acumulada por los autores en muchos años de trabajo en la enseñanza del análisis funcional en el Instituto Físico-técnico de Moscú, en el Instituto I. Gubkin de la Industria Petroquímica y del Gas y en el Instituto de Acero y Aleaciones. A la par con los problemas tradicionales, redactados sobre la base de la bibliografía referida en los apartados finales del libro, se ha incluido un gran número de problemas nuevos que responden a las necesidades actuales de la práctica. En particular, problemas, cuya solución presupone el empleo de computadoras, así como los del análisis funcional aplicado y no lineal.

El contenido de esta obra es heterogéneo. Cada tema comprende problemas de distinto grado de dificultad, destinados tanto para tareas en el aula como para el trabajo individual de los estudiantes. Además de los problemas de carácter técnico o de cálculos existen otros que permiten comprender mejor uno u otro concepto o resultado. Pueden verse grupos de problemas útiles para el estudio individual de algunas cuestiones teóricas, que presentan una afirmación nada fácil descomponiéndola en ejercicios más o menos elementales. Se publican las respuestas o sugerencias para la solución de la mayoría de los problemas.

El compendio consta de ocho capítulos, cada uno de los cuales comprende, a su vez, varios párrafos. Estos empiezan con una breve introducción teórica que contiene los teoremas y las definiciones fundamentales necesarios para resolver los problemas ulteriores y también breves descripciones de los procedimientos matemáticos empleados. Los datos teóricos se intercalan, a veces, en el párrafo, precediendo a un grupo de problemas sobre el tema dado.

En el capítulo 1 se han reunido los problemas referentes a la teoría de los espacios métricos, normados lineales, de Banach, de Hilbert, de Lebesgue y de Sóbolev. Un párrafo aparte (§ 5) se dedica a la cuestión (importante para las aplicaciones) de construir el elemento de la aproximación óptima en los espacios de Hilbert y de Banach.

El capítulo 2 incluye materiales sobre la teoría de operadores lineales. A la par con los problemas generales vinculados con los conceptos de continuidad, acotación y norma de los operadores lineales, así como con el concepto de operador inverso, se presta mucha atención a los operadores lineales concretos, en particular, a las integrales y diferenciales ampliamente utilizados para resolver problemas aplicados.

Se analizan también los operadores lineales cerrados no acotados.

En el capítulo 3 se reúnen los problemas de la teoría de espacios duales y operadores conjugados.

En el capítulo 4 se consideran los conjuntos compactos, los operadores totalmente continuos y normalmente resolubles.

En el capítulo 5 se tratan problemas de la teoría de los operadores autoconjugados en los espacios de Hilbert, de la teoría del espectro de operadores lineales, totalmente continuos y autoconjugados. Unos párrafos especiales se dedican a las ecuaciones integrales lineales. Se consideran las resoluciones de ecuaciones integrales de segunda especie y también el método de regularización para las ecuaciones integrales de primera especie (§ 21). En este mismo capítulo se presta atención a los operadores no acotados, en particular, al operador de Sturm—Liouville (§ 22).

El capítulo 6 comprende problemas del análisis funcional no lineal. Se consideran la diferenciación en el caso no lineal, aplicaciones contraídas, el método de tangentes de Newton, el principio de Schauder y los operadores implícitos.

Señalemos que estas y otras partes del análisis funcional no lineal surgieron debido a las crecientes demandas de la teoría de las ecuaciones diferenciales, de los métodos numéricos, de la programación y de otras partes de las matemáticas.

El capítulo 7 puede ser de interés para los especialistas en matemática aplicada por contener una colección de problemas y ejercicios de los más importantes métodos aproximados modernos: el método de esquemas de diferencias, el de los «splines», de Galiorkin y el de operadores monótonos.

El capítulo 8, el último, está dedicado al cálculo de variaciones, tanto al clásico (§§ 30, 31) como al abstracto (§ 32), con la particularidad de que los autores han tratado de hallar el enfoque único de estas cuestiones.

Debido a que el compendio está destinado, principalmente, a los estudiantes de las escuelas técnicas superiores, los autores consideraron inconveniente incluir ejercicios de la teoría de los espacios topológicos y topológicos lineales, como también de la teoría de la medida. A raíz del volumen reducido, el compendio tampoco comprende algunas partes aplicadas importantes del análisis funcional, en particular, las referentes a su aplicación a la teoría de las ecuaciones diferenciales en derivadas parciales (el método general

de Fourier, las funciones generalizadas, los semigrupos y los esquemas aproximados) y a la teoría de la gestión óptima.

Los autores expresan su muy profundo reconocimiento a A. Kirílov, profesor titular de la cátedra de la teoría de funciones y análisis funcional de la Universidad Lomonósov de Moscú, al Prof. A. Prilepko y al personal de la cátedra de matemática superior, que él encabeza en el Instituto de Física e Ingeniería de Moscú, por el gran número de valiosos consejos, que fueron tomados en consideración al preparar esta obra.

Los autores también agradecen sinceramente a A. Shtern, quien corrigió con todo detalle el texto del manuscrito e hizo muchas observaciones de importancia, así como a L. Korelshtéin por haber ayudado a redactar las respuestas y sugerencias.

V. Trenoguin
B. Pisarievski
T. Sóboleva

Capítulo 1

Espacios normados

§ 1. Espacios normados lineales

Un espacio lineal X sobre el conjunto de los números reales R (de los números complejos C) se denomina espacio *normado* si para todo $x \in X$ se pone en correspondencia un número no negativo $\| x \|$ llamado *norma* de x, tal que se cumplan los tres axiomas siguientes:

1) $\| x \| = 0$ si, y sólo si, $x = 0$;

2) $\| \lambda x \| = | \lambda | \cdot \| x \|$ para cualquier $x \in X$ y para cualquier número real (complejo) λ;

3) $\| x + y \| \leqslant \| x \| + \| y \|$ para cualesquiera $x, y \in X$.

El conjunto $S_r(x_0) = \{x \in X: \| x - x_0 \| < r\}$ se llama *bola abierta* con centro en el punto $x_0 \in X$ y radio $r > 0$. El conjunto $\overline{S}_r(x_0) = \{x \in X: \| x - x_0 \| \leqslant r\}$ se llama *bola cerrada* de centro en el punto $x_0 \in X$ y radio $r > 0$. El conjunto $\sigma_r(x_0) = \{x \in X: \| x - x_0 \| = r\}$ se llama *esfera* con centro en el punto $x_0 \in X$ y radio $r > 0$.

Un conjunto $A \subset X$ se denomina *acotado* si es posible encerrarlo en una bola (abierta o cerrada). El número $\operatorname{diam} A = \sup_{x, y \in A} \| x - y \|$ se llama *diámetro* del conjunto $A \subset X$. El número $\rho(x, A) = \inf_{y \in A} \| x - y \|$ se llama *distancia de un punto* $x \in X$ *a un conjunto* $A \subset X$. El número $\rho(A, B) = \inf_{x \in A,\ y \in B} \| x - y \|$ se llama *distancia entre los conjuntos* $A, B \subset X$.

Un conjunto $M \subset X$ se denomina *abierto* si para cualquier $x_0 \in M$ existe un $r > 0$ tal, que $S_r(x_0) \subset M$. Un punto $a \in X$ se llama punto de *acumulación* del conjunto $M \subset X$ si en cualquier bola $S_r(a)$ existe un punto $x \in M$ $(x \neq a)$. El conjunto de todos los puntos de acumulación del conjunto M se designa por M'. El conjunto $M \cup M'$ se denomina *clausura* (*adherencia*) del conjunto M y se denota

mediante $\overline{M}$. Un conjunto $M \subset X$ se llama *cerrado*, cuando $\overline{M} = M$.

Una sucesión $x_n \in X$ $(n \in \mathbf{N})$ se llama *convergente* hacia el elemento $x_0 \in X$ y se escribe $x_n \to x_0$, si $\| x_n - x_0 \| \to 0$ para $n \to \infty$.

Un conjunto $L \subset X$ se denomina *variedad lineal* si de $x, y \in L$ se deduce que $x + y \in L$ y $\lambda x \in L$ para cualquier número λ. Si la variedad lineal es un conjunto cerrado en X, entonces se la llaman *subespacio*. *La suma algebraica* de los conjuntos A y B del espacio X es el conjunto $A + B$ de todas las sumas posibles de tipo $a + b$, donde $a \in A$, $b \in B$. Sea $x_0 \in X$ un elemento arbitrario, $L \subset X$ una variedad lineal. El conjunto $x_0 + L$ se denomina *variedad afín*. Sean L y M subespacios del espacio X tales que todo elemento $x \in X$ se representa unívocamente en la forma $x = u + v$, donde $u \in L$, $v \in M$. En este caso se dice que X es la *suma directa* de L y M y se escribe $X = L \oplus M$.

Se llama *segmento*, que une los puntos $x, y \in X$, al conjunto de puntos de tipo $\alpha x + \beta y$, donde $\alpha \geqslant 0$, $\beta \geqslant 0$, $\alpha + \beta = 1$. Un conjunto $A \subset X$ se llama *convexo* si el segmento, que une cualesquiera dos puntos de A, está situado completamente en A.

Un conjunto $A \subset X$ se llama *siempre denso* en X, si $\overline{A} = X$. Un espacio X se llama *separable*, si en él existe un conjunto numerable siempre denso. Un conjunto $A \subset X$ se llama *nunca denso* en X, si toda bola $S \subset X$ contiene otra bola S_1 que no posee puntos pertenecientes a A.

Un espacio X se llama *estrictamente normado* si en él la igualdad $\| x + y \| = \| x \| + \| y \|$, siendo $x \neq 0$, $y \neq 0$ se cumple solamente para $y = \lambda x$, donde $\lambda > 0$.

Una aplicación $F: X \to Y$ de un espacio normado lineal X en un espacio normado lineal Y se llama *continua en el punto* $x_0 \in X$, si para cualquier $\varepsilon > 0$ existe una $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tal, que para todo $x \in S_\delta(x_0)$ $f(x) \in S_\varepsilon(f(x_0))$. Una aplicación $F: X \to Y$ se llama *continua*, si es continua en cada punto $x_0 \in X$. Una aplicación $F: X \to Y$ se llama *uniformemente continua*, si para cualquier $\varepsilon > 0$ existe $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tal, que para todo $x_0 \in X$ de $x \in S_\delta(x_0)$ se deduce que $f(x) \in S_\varepsilon(f(x_0))$.

1.1. Demostrar que en la definición de espacio normado lineal se puede cambiar el axioma 1) por el axioma: de $\| x \| = 0$ se deduce que $x = 0$.

1.2. Sean $x_n, x, y_n, y \in X$ $(n \in \mathbf{N})$. Demostrar que:

a) si $x_n \to x$, entonces x_n es una sucesión acotada;
b) si $x_n \to x$, $\lambda_n \to \lambda$, $\lambda_n \in \mathbf{C}$, entonces $\lambda_n x_n \to \lambda x$;
c) si $x_n \to x$, entonces $\| x_n \| \to \| x \|$;
d) si $x_n \to x$ y $\| x_n - y_n \| \to 0$, entonces $y_n \to x$;
e) si $x_n \to x$, entonces $\| x_n - y \| \to \| x - y \|$;
f) si $x_n \to x$, $y_n \to y$, entonces $\| x_n - y_n \| \to \| x - y \|$.

1.3. Demostrar que una bola abierta $S_r(x_0)$ es un conjunto abierto, una bola cerrada $\overline{S}_r(x_0)$ es un conjunto cerrado, y la clausura (adherencia) $S_r(x_0)$ coincide con $\overline{S}_r(x_0)$.

1.4. Demostrar que diam $S_r(x_0) = 2r$.

1.5. Sea $\overline{S}_r(a) \subset \overline{S}_R(b) \subset X$. Demostrar que $r \leqslant R$ y $\| a - b \| \leqslant R - r$.

1.6. Demostrar que para cualesquiera elementos $x, y \in X$ se cumple la desigualdad $\| x \| \leqslant$ máx $\{\| x + y \|, \| x - y \|\}$.

1.7. Demostrar que la suma algebraica y la unión de dos conjuntos acotados son conjuntos acotados.

1.8. Demostrar que un conjunto $A \subset X$ es acotado si, y sólo si, diam $A < \infty$.

1.9. Demostrar que un conjunto $A \subset X$ es acotado si, y sólo si, para cualquier sucesión $x_n \in A$ y cualquier sucesión $\lambda_n \in \mathbf{C}$, que tiende a cero, la sucesión $\lambda_n x_n$ tiende a cero.

1.10. Sea $A \subset X$ un conjunto acotado. Demostrar que $\overline{A}$ es un conjunto acotado y diam $A =$ diam $\overline{A}$

1.11. Demostrar que para un conjunto arbitrario $A \subset X$ el conjunto A' es cerrado.

1.12. Demostrar que para un conjunto arbitrario $A \subset X$ tiene lugar la inclusión $(A')' \subset A'$. ¿Es posible la inclusión estricta en este caso?

1.13. ¿Se deduce de $A, B \subset X$, $\overline{A} \subset \overline{B}$ que $A \subset B$?

1.14. Sea $A \subset X$ un conjunto cerrado. Demostrar que $\rho(x, A) = 0$ si, y sólo si, $x \in A$.

1.15. Sean $A, B \subset X$ conjuntos arbitrarios. Demostrar que $\rho(A, B) = \rho(\overline{A}, B) = \rho(A, \overline{B}) = \rho(\overline{A}, \overline{B})$.

1.16. Sea $x \in X$ un punto arbitrario, $A \subset X$ un conjunto arbitrario. Demostrar que $\rho(x, A) = \rho(x, \overline{A})$.

1.17. Sean $A, B \subset X$ conjuntos cerrados. ¿Es posible que $\rho(A, B) = 0$ si $A \cap B = \varnothing$?

1.18. Sea $A \subset X$ un conjunto arbitrario. Denominaremos *frontera* de un conjunto A al conjunto ∂A de puntos $x \in X$ tales, que toda bola abierta de centro en x contiene, por lo

menos, un punto de A y, por lo menos, un punto del complemento de A. Demostrar que ∂A es un conjunto cerrado y la frontera de A coincide con la frontera del complemento de A.

1.19. Demostrar que si, por lo menos, uno de los conjuntos A, $B \subset X$ es abierto, $A + B$ es un conjunto abierto.

1.20. Sean A_1, $A_2 \subset X$ conjuntos cerrados y $A_1 \cap A_2 = \varnothing$. Construir los conjuntos abiertos B_1, $B_2 \subset X$ tales, que $A_1 \subset B_1$, $A_2 \subset B_2$ y $B_1 \cap B_2 = \varnothing$.

1.21. Demostrar que en todo espacio normado lineal existen dos conjuntos abiertos no intersecantes que no pueden ser incluidos en los cerrados no intersecantes.

1.22. Comprobar que en los casos siguientes se cumplen los axiomas de norma, es decir, la norma está definida correctamente. ¿Qué significa la convergencia de la sucesión en cada espacio mencionado a continuación?

a) El espacio E^m de las columnas $x = (x_k)_{k=1}^m$ ($x_k \in \mathbf{R}$ ($x_k \in \mathbf{C}$)) con la norma $\| x \| = [\sum_{k=1}^m | x_k |^2]^{1/2}$.

b) El espacio c^m de las columnas $x = (x_k)_{k=1}^m$ ($x_k \in \mathbf{R}$ ($x_k \in \mathbf{C}$)) con la norma $\| x \| = \max_{1 \leqslant k \leqslant m} | x_k |$.

c) El espacio l^m de las columnas $x = (x_k)_{k=1}^m$ ($x_k \in \mathbf{R}$ ($x_k \in \mathbf{C}$)) con la norma $\| x \| = \sum_{k=1}^m | x_k |$.

d) El espacio l_p^m ($p > 1$) de las columnas $x = (x_k)_{k=1}^m$ ($x_k \in \mathbf{R}$ ($x_k \in \mathbf{C}$)) con la norma

$$\| x \| = [\sum_{k=1}^m | x_k |^p]^{1/p}.$$

e) El espacio l_1 de las sucesiones $x = (x_1, x_2, \ldots)$ ($x_k \in \mathbf{R}$ ($x_k \in \mathbf{C}$)) que satisfacen la condición $\sum_{k=1}^\infty | x_k | < \infty$, con la norma

$$\| x \| = \sum_{k=1}^\infty | x_k |.$$

f) El espacio l_2 de las sucesiones $x = (x_1, x_2, \ldots)$ ($x_k \in \mathbf{R}$ ($x_k \in \mathbf{C}$)) que satisfacen la condición $\sum_{k=1}^\infty | x_k |^2 < \infty$

con la norma

$$\| x \| = [\sum_{k=1}^{\infty} | x_k |^2]^{1/2}.$$

g) El espacio l_p $(p \geqslant 1)$ de las sucesiones $x = (x_1, x_2, \ldots)$ $(x_k \in \mathbf{R}$ $(x_k \in \mathbf{C}))$ que satisfacen la condición $\sum_{k=1}^{\infty} | x_k |^p < \infty$ con la norma

$$\| x \| = [\sum_{k=1}^{\infty} | x_k |^p]^{1/p}.$$

h) El espacio m de las sucesiones acotadas $x = (x_1, x_2, \ldots)$ $(x_k \in \mathbf{R}$ $(x_k \in \mathbf{C}))$ con la norma

$$\| x \| = \sup_k | x_k |.$$

i) El espacio c_0 de las sucesiones $x = (x_1, x_2, \ldots)$ $(x_k \in \mathbf{R}$ $(x_k \in \mathbf{C}))$ que tienden a cero con la norma

$$\| x \| = \max_k | x_k |.$$

j) El espacio c de las sucesiones convergentes $x = (x_1, x_2, \ldots)$ $(x_k \in \mathbf{R}$ $(x_k \in \mathbf{C}))$ con la norma

$$\| x \| = \sup_k | x_k |.$$

1.23. Comprobar que en los casos siguientes se cumplen los axiomas de norma, es decir, la norma está definida correctamente. ¿Qué significa la convergencia de la sucesión en cada espacio mencionado a continuación?

a) El espacio $C[a, b]$ de las funciones continuas sobre $[a, b]$ con la norma

$$\| x \| = \max_{t \in [a, b]} | x(t) |.$$

b) El espacio $C^k[a, b]$ de las funciones diferenciables continuamente k veces sobre $[a, b]$ con la norma

$$\| x \| = \sum_{i=0}^{k} \max_{t \in [a, b]} | x^{(i)}(t) |.$$

c) El espacio $M[a, b]$ de las funciones acotadas sobre $[a, b]$ con la norma

$$\| x \| = \sup_{t \in [a, b]} | x(t) |.$$

d) El espacio K de las funciones finitas continuas sobre la recta real (las que son iguales a cero fuera de un intervalo propio de cada función) con la norma

$$\| x \| = \max_t | x(t) |.$$

e) El espacio $\widetilde{L}_p [a, b]$ de las funciones continuas sobre $[a, b]$ con la norma

$$\| x \| = \Big[\int_a^b | x(t) |^p \, dt \Big]^{1/p}, \quad 1 \leqslant p < \infty.$$

f) El espacio $V [a, b]$ de las funciones de variación acotada sobre $[a, b]$ con la norma

$$\| x \| = | x(a) | + \bigvee_a^b x(t).$$

Una función $x(t)$ dada en $[a, b]$ se llama *función de variación acotada* si existe una constante c tal, que para toda partición del segmento $[a, b]$: $a = t_0 < t_1 \ldots < t_n = b$ se cumple la desigualdad $\sum_{k=1}^{n} | x(t_k) - x(t_{k-1}) | < c$. *La variación total* de una función de variación acotada sobre $[a, b]$ es un número

$$\bigvee_a^b x(t) = \sup \sum_{k=1}^{n} | x(t_k) - x(t_{k-1}) |,$$

donde la cota superior se toma por todas las posibles particiones finitas del segmento $[a, b]$.

1.24. Representar la bola unitaria cerrada $\overline{S}_1 (0)$ en los espacios reales E^2, c^2, l^2, l_3^2.

1.25. ¿Puede ponerse $\| x \| = [\sum_{k=1}^{m} | x_k |^p]^{1/p}$ en el conjunto de columnas $x = (x_k)_{k=1}^{m}$ $(x_k \in \mathbf{R})$ si $p < 1$, $m \geqslant 2$?

1.26. Demostrar las desigualdades siguientes para las normas:

a) $\alpha_m \| x \|_{E^m} \leqslant \| x \|_{c^m} \leqslant \beta_m \| x \|_{E^m}$;

b) $\gamma_m \| x \|_{l^m} \leqslant \| x \|_{c^m} \leqslant \delta_m \| x \|_{l^m}$;

c) $\varepsilon_m \| x \|_{E^m} \leqslant \| x \|_{l^m} \leqslant \nu_m \| x \|_{E^m}$.

Indicar los valores óptimos de las constantes positivas α_m, β_m, γ_m, δ_m, ε_m, ν_m contenidas en estas desigualdades.

1.27. Sea $\alpha_k > 0$ $(k = 1, 2, \ldots, m)$. Demostrar que en el espacio de las columnas $x = (x_k)_{k=1}^m$ $(x_k \in \mathbf{R})$ puede introducirse la norma de los modos siguientes:

a) $\| x \| = \max\limits_{1 \leqslant k \leqslant m} (\alpha_k \mid x_k \mid)$;

b) $\| x \| = \sum\limits_{k=1}^{m} \alpha_k \mid x_k \mid$;

c) $\| x \| = [\sum\limits_{k=1}^{m} \alpha_k \mid x_k \mid^2]^{1/2}$.

1.28. Demostrar que en el espacio de las columnas $x = (x_k)_{k=1}^m$ $(x_k \in \mathbf{R})$ puede introducirse la norma de los modos siguientes:

a) $\| x \| = [\sum\limits_{i=1}^{m} \sum\limits_{k=1}^{i} \mid x_k \mid^2]^{1/2}$;

b) $\| x \| = \max\limits_{1 \leqslant k \leqslant m} \left| \sum\limits_{i=1}^{k} x_i \right|$.

1.29. Sea $A = \| a_{ij} \|$ $(i, j = 1, 2, \ldots, m)$ una matriz definida positiva simétrica. Demostrar que en el espacio de las columnas $x = (x_k)_{k=1}^m$ $(x_k \in \mathbf{R})$ puede introducirse la norma

$$\| x \| = [\sum_{i,\, j=1}^{m} a_{ij} x_i x_j]^{1/2}.$$

1.30. Indicar un ejemplo de la sucesión $x^{(n)} = (x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \ldots)$ $(x_k \in \mathbf{R})$ que pertenezca a cada uno del par considerado de espacios y que:

a) converja en m, pero no converja en l_1;
b) converja en m, pero no converja en l_2;
c) converja en l_2, pero no converja en l_1;
d) converja en c_0, pero no converja en l_1;
e) converja en c_0, pero no converja en l_2.

1.31. Demostrar que para cualquier $p \geqslant 1$ todo elemento del espacio l_p es un elemento del espacio c_0, pero el elemento $x = (1, 1/\ln 2, 1/\ln 3, \ldots, 1/\ln n, \ldots) \in c_0$ no pertenece a l_p para ningún $p \geqslant 1$.

1.32. Demostrar que considerando l_1 como un conjunto en el espacio m su adherencia es c_0.

1.33. ¿Converge en el espacio C [0, 1] la sucesión:

a) $x_n(t) = t^n - t^{n+1}$;

b) $y_n(t) = t^n - t^{2n}$?

1.34. ¿Converge la sucesión

$$x_n(t) = \frac{t^{n+1}}{n+1} - \frac{t^{n+2}}{n+2}$$

en el espacio:

a) $C[0, 1]$; b) $C^1[0, 1]$?

1.35. Sean, $x_n(t)$, $x(t)$, $y(t) \in C^h[a, b]$, $x_n(t) \to x(t)$ para $n \to \infty$. Demostrar que $x_n(t)\, y(t) \to x(t)\, y(t)$ para $n \to \infty$.

1.36. Demostrar que toda sucesión convergente en el espacio $C[a, b]$ será convergente también en el espacio $\widetilde{L}_2[a, b]$. Construir un ejemplo de una sucesión que converge en el espacio $\widetilde{L}_2[a, b]$ y no converge en el espacio $C[a, b]$.

1.37. En el espacio lineal de las funciones dos veces continuamente diferenciables sobre $[a, b]$, ¿puede admitirse que la norma del elemento $x(t)$ sea:

a) $|x(a)| + |x'(a)| + \|x''\|_{C[a, b]}$;

b) $\|x''\|_{C[a, b]} + \|x\|_{\widetilde{L}_2[a, b]}$;

c) $|x(a)| + |x(b)| + \|x''\|_{C[a, b]}$;

d) $|x(a)| + \|x'\|_{C[a, b]} + \|x''\|_{\widetilde{L}_2[a, b]}$?

1.38. En el espacio lineal de las funciones continuamente diferenciables sobre $[a, b]$, ¿puede admitirse que la norma del elemento $x(t)$ sea:

a) $\max\limits_{t \in [a, b]} |x(t)|$;

b) $\max\limits_{t \in [a, b]} |x'(t)|$;

c) $|x(b) - x(a)| + \max\limits_{t \in [a, b]} |x'(t)|$;

d) $|x(a)| + \max\limits_{t \in [a, b]} |x'(t)|$;

e) $\int\limits_a^b |x(t)|\, dt + \max\limits_{t \in [a, b]} |x'(t)|$?

1.39. ¿Será: a) abierto; b) cerrado el conjunto de todos los polinomios en el espacio $C[a, b]$?

1.40. ¿Será cerrado en el espacio $C[a, b]$ el conjunto de polinomios de grado:

a) $\leqslant k$; b) $= k$?

1.41. Demostrar que en el espacio $C[a, b]$ un conjunto de funciones $x(t)$, tales que para cualquier $t \in [a, b]$ se cumple la desigualdad $|x(t)| < 1$, es abierto.

1.42. Sea $M \subset \mathbf{R}$ un conjunto dado. Hacemos $A_M = \{x(t) \in C[a, b]: x(t) \in M$ para cualquier $t \in [a, b]\}$. ¿Será el conjunto A_M:

a) abierto si M es abierto;

b) cerrado si M es cerrado?

1.43. Una función $x = f(t)$ está definida y es continua en todo el eje real. Demostrar que el conjunto $\{t \in \mathbf{R}: f(t) < 1\}$ es abierto en $\mathbf{R}$.

1.44. Demostrar que el conjunto de las funciones continuas lineales a trozos es siempre denso en el espacio $C[a, b]$.

1.45. Demostrar que el conjunto de los polinomios es siempre denso en el espacio $C^h[a, b]$.

1.46. ¿Cumpliendo qué condiciones la sucesión $a_n \in \mathbf{R}$ $(a_n > 0)$, será un conjunto acotado:

a) el paralelepípedo $\{x \in l_2, x = (x_1, x_2, \ldots): |x_n| < a_n\}$;

b) el elipsoide $\{x \in l_2, x = (x_1, x_2, \ldots): \sum_{n=1}^{\infty} x_n^2/a_n^2 < 1\}$?

1.47. Demostrar que el paralelepípedo $\{x \in l_2, x = (x_1, x_2, \ldots): |x_n| < 1\}$ es un conjunto abierto.

1.48. ¿Cumpliendo qué condiciones la sucesión $a_n \in \mathbf{R}$ $(a_n > 0)$ será un conjunto abierto el paralelepípedo $\{x \in l_2, x = (x_1, x_2, \ldots): |x_n < a_n\}$?

1.49. Demostrar que el paralelepípedo $\{x \in l_2, x = (x_1, x_2, \ldots): |x_n| \leqslant a_n\}$ es un conjunto cerrado.

1.50. Demostrar que un espacio normado lineal X es estrictamente normado si, y sólo si, la esfera $\sigma_1(0)$ no contiene ni un solo segmento, es decir, de $x, y \in \sigma_1(0)$ $(x \neq y)$ se desprende que $\alpha x + (1 - \alpha) y \notin \sigma_1(0)$ para cualquier $\alpha \in (0, 1)$.

1.51. ¿Cuáles espacios entre los siguientes son estrictamente normados:

a) c^2; b) l_1; c) l_2; d) m; e) $C[0, 1]$; f) $\widetilde{L_2}[0, 1]$?

1.52. Sean, A, $B \subset X$ conjuntos convexos. ¿Cuáles de los siguientes conjuntos $A \cup B$, $A \cap B$, $A + B$ son también convexos?

1.53. Sean, $A \subset X$ un conjunto convexo y λ un número. Demostrar que el conjunto $\lambda A = \{x \in X: x = \lambda y, y \in A\}$

es convexo. ¿Será espacio lineal el conjunto de todos los subconjuntos convexos de un espacio X?

1.54. ¿Será conjunto convexo la adherencia de un conjunto convexo en un espacio normado lineal?

1.55. Demostrar que las bolas $S_r(x_0)$ y $\overline{S}_r(x_0)$ son conjuntos convexos. ¿Será conjunto convexo la esfera $\sigma_r(x_0)$?

1.56. Demostrar que el axioma triangular que se contiene en la definición de norma es equivalente a la exigencia de que la bola $\overline{S}_1(0)$ sea convexa.

1.57. Demostrar que toda variedad afín en un espacio normado lineal es un conjunto convexo.

1.58. ¿Será convexo en el espacio $C[0, 1]$ el conjunto de:

a) los polinomios de grado $=k$;

b) los polinomios de grado $\leqslant k$;

c) las funciones continuas que satisfacen la condición

$$\int_0^1 |x(t)|\,dt \leqslant 1;$$

d) las funciones continuas que satisfacen la condición

$$\int_0^1 |x(t)|^2\,dt \leqslant 1;$$

e) las funciones continuamente diferenciables que satisfacen la condición

$$\max_{t\in[0,1]} |x(t)| + \max_{t\in[0,1]} |x'(t)| \leqslant 1?$$

1.59. Demostrar que en el espacio l_2

a) el paralelepípedo $\{x \in l_2,\ x = (x_1, x_2, \ldots)\colon |x_n| < 2^{-n+1}\}$;

b) el elipsoide $\{x \in l_2,\ x=(x_1, x_2, \ldots)\colon \sum_{n=1}^{\infty} n^2 x_n^2 < 1\}$ son conjuntos convexos.

1.60. Demostrar que toda variedad lineal en un espacio normado lineal de dimensión finita es un subespacio.

1.61. Demostrar que toda variedad lineal de dimensión finita en un espacio normado lineal es un subespacio.

1.62. Demostrar que una bola, en un espacio normado lineal, no puede contener una variedad lineal no nula.

1.63. Sea $L \subset X$ una variedad lineal, $L \neq X$. Demostrar que L no contiene ninguna bola.

1.64. Demostrar que el conjunto de soluciones de la ecuación diferencial ordinaria no homogénea lineal de orden n

$$\frac{d^n x}{dt^n} + a_1(t)\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}} + \ldots + a_n(t)\,x = y(t),$$

donde los coeficientes $a_k(t)$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ y el segundo miembro $y(t)$ son continuos sobre $[a, b]$, forma una variedad afín de n dimensiones en el espacio $C[a, b]$.

1.65. Demostrar que en un espacio normado lineal, la adherencia de una variedad lineal es un subespacio.

1.66. Sean, L_1, $L_2 \subset X$ subespacios. Demostrar que si, por lo menos, uno de ellos es de dimensión finita, $L_1 + L_2$ es un subespacio.

1.67. ¿Forman un subespacio en el espacio $C[-1, 1]$ los siguientes conjuntos de funciones:

a) las funciones monótonas;
b) las funciones pares;
c) los polinomios;
d) los polinomios de grado $\leqslant k$;
e) las funciones continuamente diferenciables;
f) las funciones lineales a trozos continuas;
g) las funciones continuas de variación acotada;
h) las funciones $x(t)$ que satisfacen la condición $x(0) = 0$;
i) las funciones $x(t)$ que satisfacen la condición

$$\int_{-1}^{1} x(t)\,dt = 0;$$

j) las funciones que satisfacen la condición de Lipschitz con una constante que depende de la función?

1.68. Sea $L = \{x \in l_2,\ x = (x_1, x_2, \ldots)\colon \sum_{n=1}^{\infty} x_n = 0\}$.

a) Demostrar que L es una variedad lineal.
b) ¿Es L un subespacio?

1.69. ¿Forman sucesiones $x = (x_1, x_2, \ldots)$ $(x_k \in \mathbf{R})$ tales que $\sum_{k=1}^{\infty} x_k = 0$ un subespacio en el espacio:

a) l_1; b) m?

1.70. Demostrar que el espacio c_0 es un subespacio en el espacio c.

1.71. Demostrar que el espacio c es un subespacio en el espacio m.

1.72. Sean, A, $B \subset X$ conjuntos siempre densos. ¿Es posible que $A \cap B = \varnothing$?

1.73. Demostrar que el complemento de un conjunto nunca denso es siempre denso. ¿Es válida la afirmación inversa?

1.74. Demostrar que el complemento de un conjunto siempre denso abierto es nunca denso.

1.75. Demostrar que la adherencia de un conjunto nunca denso es nunca densa.

1.76. Sea L un subespacio de un espacio separable X. Demostrar que L es separable.

1.77. Sea X un espacio donde existe un conjunto innumerable A tal, que para cierto $\varepsilon > 0$ y cualesquiera $x, y \in A$ se cumple la desigualdad $\| x - y \| \geqslant \varepsilon$. Demostrar que X es un espacio no separable.

1.78. ¿Cuáles espacios de los problemas 1.22, 1.23 son separables?

1.79. En el espacio $C[0, 1]$ consideremos un conjunto L de funciones $x(t)$ tales que $x(1) = 0$. Demostrar que;

a) L es un subespacio en $C[0, 1]$;

b) existe un subespacio unidimensional M tal que $C[0, 1] = L \oplus M$.

1.80. Representar el espacio $C[0, 1]$ como una suma directa de dos subespacios de dimensión infinita.

1.81. Sean, $A \subset X$ un conjunto cerrado, $x \in X$, $x \notin A$. ¿Siempre puede existir $y \in A$ tal que $\rho(x, A) = \| x - y \|$?

1.82. Demostrar que para que una aplicación $f: X \to Y$ sea continua en el punto $x_0 \in X$ es necesario y suficiente que para toda sucesión $x_n \in X$, convergente hacia x_0, la sucesión $f(x_n)$ converja hacia $f(x_0)$.

1.83. ¿Es necesario que, para una aplicación continua $f: X \to Y$:

a) la imagen $f(A)$ de un conjunto abierto $A \subset X$ sea un conjunto abierto;

b) la imagen $f(B)$ de un conjunto cerrado $B \subset X$ sea un conjunto cerrado?

1.84. Demostrar que una aplicación continua $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, para la cual la imagen de todo conjunto abierto es un conjunto abierto, es una función monótona.

1.85. Demostrar que cada una de las siguientes condiciones es necesaria y suficiente para que una aplicación $f: X \to Y$ sea continua:

a) para todo conjunto $A \subset X$ tiene lugar la inclusión $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$;

b) la preimagen de todo conjunto abierto $B \subset Y$ es un conjunto abierto en X.

1.86. Sean, $f\colon X \to Y$ una aplicación continua del espacio X sobre todo el espacio Y, y A un conjunto siempre denso en X. Demostrar que $f(A)$ es un conjunto siempre denso en Y.

1.87. Sea un conjunto $A \subset X$ dado. Demostrar que $f(x) = \rho(x, A)$ es una aplicación continua de X en R.

1.88. Demostrar que para cualquier conjunto $A \subset X$ y cualquier $\varepsilon > 0$ el conjunto $\{x \in X: \rho(x, A) < \varepsilon\}$ es abierto, y el co junto $\{x \in X: \rho(x, A) \leqslant \varepsilon\}$ es cerrado.

1.89. Sean A_1, $A_2 \subset X$ conjuntos cerrados, con tal que $A_1 \cap A_2 = \varnothing$. Tomemos para $x \in X$

$$\varphi(x) = \frac{\rho(x, A_1)}{\rho(x, A_1) + \rho(x, A_2)}.$$

a) Demostrar que $\varphi\colon X \to \mathbf{R}$ es una aplicación continua, con tal que $0 \leqslant \varphi(x) \leqslant 1$; $\varphi(x) = 0$ si, y sólo si, $x \in A_1$; $\varphi(x) = 1$ si, y sólo si, $x \in A_2$.

b) Tomando $B_1 = \varphi^{-1}([0, 1/2))$, $B_2 = \varphi^{-1}((1/2, 1])$, demostrar que B_1, B_2 son conjuntos abiertos, con tal que $A_1 \subset B_1$, $A_2 \subset B_2$. Por tanto, tenemos nueva demostración de la afirmación del problema 1.20.

c) ¿Es la aplicación φ uniformemente continua en X?

1.90. Demostrar que la aplicación $f\colon C^1[a, b] \to C[a, b]$, $f(x) = dx/dt$ es continua.

1.91. ¿Es continua la aplicación $f\colon L \to C[a, b]$, $f(x) = dx/dt$, donde L es una variedad lineal de funciones continuamente diferenciables en el espacio $C[a, b]$?

1.92. ¿Será continua la aplicación $f(x) = x(1)$ si se considera actuante:

a) de $C[0, 1]$ en R;

b) de $\widetilde{L}_2[0, 1]$ en R (véase el problema 1.23)?

1.93. ¿Será continua la aplicación $f(x) = x^2(t)$, si se considera actuante:

a) de $C[0, 1]$ en $C[0, 1]$;

b) de $\widetilde{L}_2[0, 1]$ en $\widetilde{L}_2[0, 1]$;

c) de $C[0, 1]$ en $\widetilde{L}_2([0, 1]$?

¿Será uniformemente continua esta aplicación?

1.94. Sean, $f\colon X \to Y$, $g\colon X \to Y$ aplicaciones continuas. Demostrar que el conjunto $\{x \in X: f(x) = g(x)\}$ es cerrado en X.

1.95. Sean, A, $B \subset X$ conjuntos arbitrarios, con tal que $\rho_X(A, B) = 0$. ¿Es posible que $\rho_Y(f(A), f(B)) \neq 0$ si $f: X \to Y$ es:

a) una aplicación continua;

b) una aplicación uniformemente continua?

§ 2. Espacios de Banach

Sea X un espacio normado lineal. Una sucesión $x_n \in X$ se denomina *fundamental* si para cualquier $\varepsilon > 0$ existe un $N = N(\varepsilon)$ tal, que para cualquier $n > N$ y todos los p naturales se cumple la desigualdad $\| x_{n+p} - x_n \| < \varepsilon$. Un espacio X se denomina *completo* si toda sucesión fundamental converge en él. Un espacio normado lineal completo se denomina *de Banach*.

Dos normas $\| x \|_1$ y $\| x \|_2$ en un espacio lineal X se llaman *equivalentes* si existen dos números $\alpha > 0$, $\beta > 0$ tales, que para cualquier $x \in X$ se cumple la desigualdad $\alpha \| x \|_1 \leqslant \| x \|_2 \leqslant \beta \| x \|_1$.

Los espacios normados lineales X e Y se llaman *isomorfos* si sobre todo el X está definida una aplicación $J: X \to Y$ lineal, que realiza el isomorfismo de X e Y como espacios lineales y es tal, que existen dos constantes $\alpha > 0$, $\beta > 0$ tales, que para cualquier $x \in X$ se cumple la desigualdad $\alpha \| x \| \leqslant \| J(x) \| \leqslant \beta \| x \|$. Si $\| J(x) \| = \| x \|$, los espacios X e Y se llaman *isométricos*.

Un espacio normado lineal X se denomina *encajado* en un espacio normado lineal Y si sobre todo el X está definida una aplicación $J: X \to Y$ que es lineal y biunívoca en el campo de valores y existe una constante $\beta > 0$ tal que para cualquier $x \in X$ se cumple la desigualdad $\| J(x) \| \leqslant \beta \| x \|$.

Un espacio de Banach $\hat{X}$ se denomina *completación* de un espacio normado lineal X si X es una variedad lineal siempre densa en el espacio $\hat{X}$.

TEOREMA 2.1. *Todo espacio normado lineal X tiene la completación y ésta es única con exactitud hasta una aplicación isométrica que transforma a X en sí mismo.*

TEOREMA 2.2. *Sea dada, en un espacio de Banach X, una sucesión de bolas $\overline{S}_{r_n}(x_n)$ encajadas una en otra $(\overline{S}_{r_{n+1}}(x_{n+1}) \subset \overline{S}_{r_n}(x_n)$, con tal que $r_n \to 0$ para $n \to \infty$. Entonces en X existe, y además es único, un punto que pertenece a todas las bolas.*

2.1. Demostrar que toda sucesión fundamental en un espacio normado lineal es acotada.

2.2. Sean $x_n \in X$ una sucesión fundamental y x_{n_k} una sucesión contenida convergente. Demostrar que toda la sucesión x_n es convergente.

2.3. Sean $x_n \in X$ y la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \| x_{n+1} - x_n \|$ convergente. Demostrar que x_n es sucesión fundamental. ¿Es válida la afirmación inversa?

2.4. Sean x_n, $y_n \in X$ sucesiones fundamentales. Demostrar que la sucesión $\lambda_n = \| x_n - y_n \|$ converge.

2.5. En un espacio lineal de polinomios considerados sobre $[a, b]$ tomemos

$$\| x \|_1 = \max_{t \in [a, b]} | x(t) |, \quad \| x \|_2 = \left[\int_a^b | x(t) |^2 \, dt \right]^{1/2}.$$

a) Verificar los axiomas de norma.

b) ¿Será de Banach uno de los espacios obtenidos?

c) Describir la completación del espacio considerado según cada una de las normas.

2.6. En el espacio lineal $\widetilde{H}^1[a, b]$ de funciones reales continuamente diferenciables sobre $[a, b]$ hacemos

$$\| x \| = \left\{ \int_a^b [x^2(t) + x'^2(t)] \, dt \right\}^{1/2}.$$

a) Verificar los axiomas de norma.

b) ¿Será de Banach el espacio normado obtenido?

2.7. ¿Qué espacios en los problemas 1.22 y 1.23 son de Banach?

2.8. Sobre un espacio lineal X son dadas dos normas equivalentes. En una de ellas, X es espacio de Banach. Demostrar que X es espacio de Banach también en otra norma.

2.9. Demostrar que dos normas introducidas sobre un espacio lineal son equivalentes si, y sólo si, de la convergencia de una sucesión según una de estas normas se desprende su convergencia según la otra.

2.10. Demostrar que en un espacio lineal de funciones continuas sobre $[a, b]$ la norma $\| x \|_{\widetilde{L}_2[a, b]}$ es equiva-

lente a la norma

$$\| x \| = \left\{ \int_a^b v(t)\, x^2(t)\, dt \right\}^{1/2},$$

donde $v(t)$ es continua sobre $[a, b]$ y $v(t) \geqslant \alpha > 0$ sobre $[a, b]$.

2.11. ¿Serán equivalentes las normas $\| x \|_{C[a, b]}$ y $\| x \|_{\widetilde{L_2[a, b]}}$ sobre el espacio lineal de funciones continuas en $[a, b]$?

2.12. ¿Qué normas entre las definidas en el problema 1.38 en el espacio lineal de funciones continuamente diferenciables en $[a, b]$ serán equivalentes a la norma del espacio $C^1[a, b]$?

2.13. Demostrar que todo espacio normado lineal de dimensión finita es de Banach.

2.14. Demostrar que un subespacio de un espacio de Banach es un espacio de Banach.

2.15. Sea X un espacio normado lineal, en el cual hay una variedad lineal L que en la norma de X es un espacio completo. Demostrar que L es cerrado en X, o sea, es un subespacio.

2.16. Sean X un conjunto arbitrario, E un espacio normado lineal, f: $X \to E$ una aplicación acotada, es decir, tal que el conjunto $f(x)$ es acotado en E.

a) Demostrar que el conjunto $f_E(X)$ de todas las aplicaciones acotadas será un espacio normado lineal si tomamos $\| f \| = \sup_X \| f(X) \|$.

b) Sea X un espacio normado lineal. Demostrar que las aplicaciones continuas acotadas φ: $X \to E$ forman un subespacio en el espacio $f_E(x)$.

c) Sea E un espacio de Banach. Demostrar que $f_E(X)$ es un espacio de Banach.

2.17. Sean X un espacio de Banach, $L \subset X$ una variedad lineal. Demostrar que la completación de L según la norma de X coincide con la adherencia de L.

2.18. Sean X, Y espacios normados lineales, J: $X \to Y$ una aplicación que establece el isomorfismo. Demostrar que:

a) J es una aplicación continua;

b) la aplicación J tiene inversa que es también continua.

2.19. Demostrar que todo espacio normado lineal de n dimensiones es isomorfo al espacio E^n.

2.20. Un espacio de Banach X es isomorfo a un espacio normado lineal Y. Demostrar que Y es un espacio de Banach.

2.21. Demostrar que una aplicación idéntica $Jx = x$ realiza el encaje del espacio $C[a, b]$ en el espacio $\widetilde{L}_2[a, b]$.

2.22. Demostrar que una aplicación idéntica $Jx = x$ realiza el encaje del espacio $C^k[a, b]$ en el espacio $C[a, b]$ para cualquier k natural.

2.23. Demostrar que la afirmación del teorema 2.2 de bolas encajadas es, en general, incorrecta si, dejando vigentes otras suposiciones del teorema en vigor, suponemos que:

a) las bolas no son cerradas;

b) el espacio no es completo.

2.24. Demostrar que en un espacio de Banach una sucesión de conjuntos encajados cerrados no vacíos, cuyos diámetros tienden a cero, tiene un punto común que, además, es único.

2.25. Sea que en un espacio normado lineal X, toda sucesión de bolas encajadas cerradas, cuyos radios tienden a cero, tiene una intersección no vacía. Demostrar que X es un espacio de Banach.

2.26. Demostrar que en un espacio de Banach toda sucesión de bolas encajadas cerradas no vacías tiene un punto común.

2.27. ¿Puede tener la intersección vacía en un espacio de Banach una sucesión de conjuntos encajados cerrados no vacíos limitados?

2.28. Sea X un espacio normado lineal y L un subespacio de X. Consideremos que los elementos $x, y \in X$ pertenecen a una clase de equivalencia ξ si $x - y \in L$. Un conjunto de clases de equivalencia forma un espacio lineal llamado *espacio cociente* y denotado X/L. Demostrar que:

a) en X/L se puede introducir una norma mediante la igualdad $\| \xi \|_{X/L} = \inf\limits_{x \in \xi} \| x \|$;

b) si X es un espacio de Banach, X/L es un espacio de Banach en la norma introducida.

c) X/L es isomorfo a R si $X = C[0, 1]$, $L = \{x(t) \in C[0, 1]: x(0) = 0\}$.

§ 3. Espacios de Hilbert

Un espacio lineal real se llama *euclídeo* si a todo par de sus elementos x, y se le pone en correspondencia un número real denotado (x, y) y llamado *producto escalar*, con tal que

se cumplen los axiomas siguientes:

1) $(x, x) \geqslant 0$, $(x, x) = 0$ si, y sólo si, $x = 0$;

2) $(x, y) = (y, x)$;

3) $(\lambda x, y) = \lambda (x, y)$ para cualquier $\lambda \in \mathbf{R}$;

4) $(x + y, z) = (x, z) + (y, z)$.

Un espacio lineal complejo se llama *unitario* si a todo par de elementos suyos x, y se le pone en correspondencia un número complejo denotado (x, y) y llamado *producto escalar*, con tal que se cumplen los siguientes axiomas:

1) $(x, x) \geqslant 0$, $(x, x) = 0$ si, y sólo si, $x = 0$;

2) $(x, y) = \overline{(y, x)}$ (la raya significa la conjugación compleja);

3) $(\lambda x, y) = \lambda (x, y)$ para cualquier $\lambda \in \mathbf{C}$;

4) $(x + y, z) = (x, z) + (y, z)$.

De la *desigualdad de Cauchy—Buniakovski* $|(x, y)|^2 \leqslant (x, x)(y, y)$ se desprende que en espacios euclídeo y unitario se puede introducir la *norma* mediante la igualdad $\| x \| = \sqrt{(x, x)}$. Un espacio H con producto escalar (euclídeo o unitario) se llama *de Hilbert* si es completo en esta norma.

Se llama *ángulo* de dos elementos no nulos x e y de un espacio de Hilbert real a un ángulo φ comprendido entre 0 y π tal que

$$\cos \varphi = \frac{(x, y)}{\| x \| \cdot \| y \|}.$$

Los elementos $x, y \in H$ se llaman *ortogonales* y se escriben $x \perp y$ si $(x, y) = 0$. Un conjunto de elementos $z \in H$, tales que $(z, x) = 0$ para cualquier $x \in M \subset H$, se denota $M^{\perp}$.

Un sistema de elementos $h_1, h_2, \ldots \in H$ se llama *ortogonal* si $(h_i, h_j) = 0$ para $i \neq j$, $h_i \neq 0$, y *ortonormalizado* si

$$(h_i, h_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{para } i = j; \\ 0 & \text{para } i \neq j. \end{cases}$$

El sistema de elementos $x_1, x_2, \ldots \in H$ se llama *linealmente independiente* si para cualquier n natural el sistema $x_1, x_2, \ldots, x_n$ es linealmente independiente.

TEOREMA 3.1. *Sea $h_1, h_2, \ldots \in H$ un sistema linealmente independiente de elementos. Entonces, en H existe un*

sistema ortogonal de elementos $f_1, f_2, \ldots$, *tal que*
$f_k = a_{k1}h_1 + a_{k2}h_2 + \ldots + a_{kk}h_k$,

$$a_{kl} \in \mathbf{C}, \quad a_{kk} \neq 0, \quad k = 1, 2, \ldots;$$

$h_j = b_{j1}f_1 + b_{j2}f_2 + \ldots + b_{jj}f_j$;

$$b_{jl} \in \mathbf{C}, \quad b_{jj} \neq 0, \quad j = 1, 2, \ldots$$

La construcción de un sistema ortogonal según el linealmente independiente dado se llama *ortogonalización*.

Se llama *determinante de Gram* de un sistema de elementos $x_1, x_2, \ldots, x_n \in H$ al determinante

$$\Gamma(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \begin{vmatrix} (x_1, x_1)(x_1, x_2) & \ldots (x_1, x_n) \\ (x_2, x_1)(x_2, x_2) & \ldots (x_2, x_n) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ (x_n, x_1)(x_n, x_2) & \ldots (x_n, x_n) \end{vmatrix}.$$

Un sistema ortogonal $\varphi_1, \varphi_2, \ldots \in H$ se llama *completo* si cualquier elemento de H puede ser representado como la llamada *serie de Fourier*:

$$x = \sum_k c_k \varphi_k,$$

donde $c_k = (x, \varphi_k)/\| \varphi_k \|^2$ $(k \in \mathbf{N})$ son los coeficientes de Fourier (es decir, la serie $\sum_k c_k \varphi_k$ converge según la norma de H y su suma es igual a x). Un sistema ortogonal completo se denomina *base ortogonal* del espacio H.

TEOREMA 3.2. *Sean* M *un conjunto cerrado convexo en un espacio de Hilbert* H *y un elemento* $x \notin M$. *Entonces, existe un elemento único* $y \in M$ *tal que* $\rho(x, M) = \| x - y \|$.

TEOREMA 3.3. *Sea* $L \subset H$ *un subespacio. Entonces,* $H = L \oplus L^{\perp}$, *es decir, todo elemento* x *de* H *admite una única representación de la forma* $x = u + v$, *donde* $u \in L$, $v \in L^{\perp}$. *Al mismo tiempo,* $\rho(x, L) = \| x - u \| = \| v \|$.

El elemento u se llama *proyección* del elemento x sobre el subespacio L.

3.1. Demostrar que en la definición del espacio euclídeo (unitario) se puede sustituir el axioma 1) por el axioma: $(x, x) \geqslant 0$, de $(x, x) = 0$ se deduce $x = 0$.

3.2. Demostrar que en un espacio con el producto escalar:

a) para cualesquiera elementos x, y, z tiene lugar la *identidad de Apolonio*:

$$\| z - x \|^2 + \| z - y \|^2 = \frac{1}{2} \| x - y \|^2 + 2 \left\| z - \frac{x+y}{2} \right\|^2;$$

b) para cualesquiera elementos x, y, z, t tiene lugar la *desigualdad de Ptolomeo*:

$$\| x - z \| \cdot \| y - t \| \leqslant$$
$$\leqslant \| x - y \| \ \| z - t \| + \| y - z \| \cdot \| x - t \|;$$

¿cuándo se realiza en él la igualdad?

3.3 Demostrar que en un espacio euclídeo los elementos x e y son ortogonales si, y sólo si, $\| x \|^2 + \| y \|^2 = \| x + y \|^2$.

3.4. Demostrar que en un espacio unitario los elementos x e y son ortogonales si, y sólo si, $\| \lambda x \|^2 + \| \mu y \|^2 = \| \lambda x + \mu y \|^2$ para cualesquiera λ, $\mu \in \mathbf{C}$.

3.5. Sea X un espacio normado lineal real y para cualesquiera x, $y \in X$ se cumple la igualdad del paralelogramo:

$$\| x + y \|^2 + \| x - y \|^2 = 2 \{ \| x \|^2 + \| y \|^2 \}.$$

Demostrar que la fórmula

$$(x, y) = \frac{1}{4} \{ \| x + y \|^2 - \| x - y \|^2 \}$$

da en X un producto escalar coordinado con la norma en X, o sea, tal que $(x, x) = \| x \|^2$.

3.6. Sea X un espacio normado lineal complejo y que para cualesquiera x, $y \in X$ se cumple la igualdad de paralelogramo:

$$\| x + y \|^2 + \| x - y \|^2 = 2 \{ \| x^2 + \| y \|^2 \}.$$

Demostrar que la fórmula

$$(x, y) = \frac{1}{4} \{ \| x + y \|^2 - \| x - y \|^2 \} -$$
$$- \frac{i}{4} \{ \| x + iy \|^2 - \| x - iy \|^2 \}$$

da en X el producto escalar coordinado con la norma en X.

3.7. Demostrar que en el espacio $C[0, 1]$ no se puede introducir el producto escalar coordinado con la norma de este espacio.

3.8. Demostrar que en el espacio l_1 no se puede introducir el producto escalar coordinado con la norma de este espacio.

3.9. En el espacio lineal $\widetilde{L}_2[a, b]$ de funciones continuas sobre $[a, b]$ tomamos

$$(x, y) = \int_a^b x(t)\, y(t)\, dt.$$

¿Es de Hilbert este espacio?

3.10. En el espacio lineal $\widetilde{H}_1[a, b]$ de funciones continuamente diferenciables sobre $[a, b]$ hacemos

$$(x, y) = \int_a^b [x(t)\, y(t) + x'(t)\, y'(t)]\, dt.$$

¿Es de Hilbert el espacio $\widetilde{H}_1[a, b]$?

3.11. En el espacio lineal de sucesiones $x = (x_1, x_2, \ldots)$ $(x_k \in \mathbf{R})$ tales que

$$\sum_{k=1}^{\infty} x_k^2 < \infty,$$

pongamos

$$(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k x_k y_k,$$

donde $\lambda_k \in \mathbf{R}$, $0 < \lambda_k < 1$. ¿Será de Hilbert el espacio euclídeo obtenido?

3.12. Sea H un espacio de Hilbert separable. Demostrar que todo sistema ortonormalizado en H no es más que numerable.

3.13. Sea $x_1, x_2, \ldots, x_n$ un sistema ortogonal en un espacio de Hilbert H, $x = \sum_{k=1}^{n} x_k$. Demostrar que $\| x \|^2 = \sum_{k=1}^{n} \| x_k \|^2$.

3.14. Sea $x_1, x_2, \ldots$ un sistema ortogonal en un espacio de Hilbert H. Demostrar que la serie $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ converge en H si, y sólo si, converge la serie numérica $\sum_{k=1}^{\infty} \| x_k \|^2$.

3.15. Sea e_n $(n \in \mathbf{N})$ un sistema ortonormalizado en un espacio de Hilber H, λ_n una sucesión de números reales o complejos. Demostrar que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n e_n$ converge en H si, y sólo si, $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \|^2 < \infty$.

3.16. Sean $x_1, x_2, \ldots$ e $y_1, y_2, \ldots$ sistemas de elementos de H tales que

$$(x_i, y_i) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{para } i = j, \\ 0 & \text{para } i \neq j. \end{cases}$$

(Los sistemas $x_1, x_2, \ldots$ e $y_1, y_2 \ldots$ se llaman *biortogonales*). Demostrar que cada uno de estos sistemas es linealmente independiente.

3.17. Demostrar que un sistema de elementos de un espacio de Hilbert es linealmente independiente si, y sólo si, su determinante de Gram es distinto de cero.

3.18. Demostrar que un espacio de Hilbert es estrictamente normado.

3.19. Sea que en un espacio H con un producto escalar para $x_1, x_2 \in H$ se cumple la igualdad $\operatorname{Re}(x_1, x_2) = \|x_1\|^2 = \|x_2\|^2$. Demostrar que $x_1 = x_2$.

3.20. Sea que x_n, y_n pertenecen a una bola unitaria cerrada $\bar{S}_1(0)$ en un espacio de Hilbert H y $(x_n, y_n) \to 1$ para $n \to \infty$. Demostrar que $\|x_n - y_n\| \to 0$ para $n \to \infty$.

3.21. Demostrar que para que un elemento x de un espacio de Hilbert H sea ortogonal a un subespacio $L \subset H$ es necesario y suficiente que para cualquier elemento $y \in L$ tenga lugar la desigualdad $\|x\| \leqslant \|x - y\|$.

3.22. Demostrar que para un conjunto arbitrario M en un espacio de Hilbert H el conjunto $M^{\perp}$ es un subespacio.

3.23. Demostrar que para todo conjunto M en un espacio de Hilbert H tiene lugar la inclusión $M \subset (M^{\perp})^{\perp}$. ¿Es posible aquí la inclusión estricta?

3.24. Demostrar que para un conjunto M en un espacio de Hilbert H la igualdad $M = (M^{\perp})^{\perp}$ se cumple si, y sólo si, M es un subespacio de H.

3.25. Sean M, N tales conjuntos de un espacio de Hilbert que $M \subset N$. Demostrar que $M^{\perp} \supset N^{\perp}$.

3.26. En el espacio lineal de funciones $x(t)$ continuas sobre $[0, \infty)$, tales que $\int_0^{\infty} |x(t)|^2 e^{-t}\, dt$ converge, hacemos

$$(x, y) = \int_0^{\infty} x(t)\, y(t)\, e^{-t}\, dt.$$

a) Verificar el cumplimiento de los axiomas del producto escalar.

b) Consideremos un sistema linealmente independiente $1, t, t^2, \ldots$. Como resultado de su ortogonalización, obtenemos el sistema ortogonal de polinomios de Chébishev—Laguerre. Hallar sus tres primeros polinomios.

3.27. En el espacio lineal de funciones $x(t)$ continuas en el intervalo $(-\infty, \infty)$, tales que $\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 e^{-t^2}\,dt$ converja, hacemos $(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, y(t)\, e^{-t^2}\,dt$.

a) Verificar el cumplimiento de los axiomas del producto escalar.

b) Consideremos el sistema linealmente independiente $1, t, t^2, \ldots$. Como resultado de su ortogonalización, obtenemos el sistema ortogonal de polinomios de Chébishev—Hermite. Hallar sus tres primeros polinomios.

3.28. En el espacio l_2 consideremos el conjunto

$$M = \{x \in l_2,\ x = (x, x_2, \ldots):\ \sum_{k=1}^{\infty} x_k = 0.$$

Demostrar que M es una variedad lineal siempre densa en l_2.

3.29. En la variedad lineal M del problema 3.28 hallar un sistema de elementos, linealmente independiente, cuya ortogonalización da la base del espacio l_2.

3.30. Demostrar que para un n natural dado, el conjunto

$$M = \{x \in l_2,\ x = (x_1, x_2, \ldots):\ \sum_{k=1}^{n} x_k = 0$$

es un subespacio del espacio l_2. Describir tal subespacio N, que $l_2 = M \oplus N$.

3.31. Sean M, N subespacio de un espacio de Hilbert H y $M \perp N$. Demostrar que $M + N$ es un subespacio de H.

3.32. Sean M, N conjuntos en un espacio de Hilbert tales que cualquier elemento $x \in H$ se representa únicamente en la forma $x = u + v$, donde $u \in M$, $v \in N$. ¿Se deduce de aquí que M y N son subespacios del espacio H?

3.33. En el espacio l_2 poner un ejemplo de un conjunto M tal, que el conjunto $M + M^{\perp}$ no coincida con todo el l_2.

3.34. Sean M, N subespacios de un espacio de Hilbert H, tales que $H = M \oplus N$. ¿Es cierto que $N = M^{\perp}$?

3.35. Poner un ejemplo de dos subespacios de dimensión infinita M, N del espacio l_2, tales que $l_2 = M \oplus N$.

3.36. En el espacio $\widetilde{L}_2[-1, 1]$ consideremos el conjunto M de funciones $x(t)$ iguales a cero para $t \geqslant 0$.

a) Demostrar que M es un subespacio $\tilde{L}_2[-1, 1]$.

b) Describir el subespacio $M^{\perp}$.

c) ¿Se cumple en el espacio $\tilde{L}_2[-1, 1]$ la afirmación del teorema 3.3?

3.37. En el espacio l_2 consideremos la sucesión

$$x_k = 1, \frac{1}{2^k}, \frac{1}{2^{2k}}, \frac{1}{3^{3k}}, \ldots, k \in \mathbf{N}.$$

Demostrar que la cápsula lineal de esta sucesión es siempre densa en el espacio l_2.

3.38. Sean x_n $(n \in \mathbf{N})$ una sucesión dada de elementos de un espacio de Hilbert H; λ_n $(n \in \mathbf{N})$, una sucesión dada de números reales (complejos). Consideremos el conjunto $M = \{x \in H: (x, x_k) = \lambda_k\}$. Demostrar que si M no es vacío, $M = x_0 + L$, donde $x_0 \in H$, L es un subespacio de H.

3.39. Sean x_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$ una sucesión dada de elementos de un espacio de Hilbert H, λ_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$ una sucesión dada de números reales. Demostrar que el conjunto $M = \{x \in H: \operatorname{Re}(x, x_k) \leqslant \lambda_k, k = 1, 2, \ldots, n\}$ es cerrado y convexo en H.

3.40. Sea M un conjunto convexo cerrado en un espacio de Hilbert H. Demostrar que en M existe y es único un elemento de norma mínima.

3.41. En el espacio l_2 construir un conjunto cerrado, en el cual no hay elemento de norma mínima.

3.42. Sea M un conjunto convexo cerrado en un espacio de Hilbert real H. Demostrar que un elemento $y \in M$ satisface a la condición $\rho(x, M) = \| x - y \|$ si, y sólo si, para cualquier $z \in M$ se cumple la desigualdad $(x - y, y - z) \geqslant 0$.

3.43. En un espacio de Hilbert H consideremos el conjunto convexo cerrado $M = \bar{S}_r(x_0)$. Sea $x \in H$, $x \notin M$. Demostrar que un elemento $y \in M$ tal que $\rho(x, M) = \| x - y \|$, tiene la forma

$$y = x_0 + r \frac{x - x_0}{\| x - x_0 \|}.$$

3.44. Demostrar que en un espacio de Hilbert toda sucesión de conjuntos acotados cerrados convexos encajados no vacíos posee una intersección no vacía.

3.45. En el espacio $C[0, 1]$ construir una sucesión de conjuntos acotados convexos cerrados encajados no vacíos, que posea una intersección vacía.

§ 4. Espacios de Lebesgue y de Sóbolev

Un conjunto $M \subset [a, b]$ tiene *medida nula* si para cualquier $\varepsilon > 0$ existe tal sistema finito o numerable de segmentos $[\alpha_n, \beta_n]$, que $M \subset \bigcup_n [\alpha_n, \beta_n]$, $\sum_n (\beta_n - \alpha_n) < \varepsilon$. Si para una sucesión $x_n(t)$, $(n \in \mathbf{N})$ en todo $[a, b]$, a excepción, posiblemente, de un conjunto de medida nula, existe el límite igual a $x(t)$, se dice que $x_n(t)$ converge hacia $x(t)$ en *casi todos* los puntos de $[a, b]$ y se denota $\lim\limits_{n\to\infty} x_n(t)^{\text{c.t.p.}} = x(t)$.

Sea $\widetilde{L}_1[a, b]$ un espacio de funciones continuas sobre $[a, b]$ con la norma

$$\|x\| = \int_a^b |x(t)|\, dt;$$

la convergencia en esta norma se llama *convergencia en media*. El espacio $\widetilde{L}_1[a, b]$ no es completo; su completación se denomina *espacio de Lebesgue* y se denota $L_1[a, b]$. Una función $x(t)$ se llama *integrable según Lebesgue* en el segmento $[a, b]$ si existe una sucesión fundamental en media de funciones continuas $x_n(t)$, $(n \in \mathbf{N})$ tal, que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n(t)^{\text{c.t.p.}} = x(t)$. Entonces, se llama *integral de Lebesgue* en $[a, b]$ de la función $x(t)$ al número

$$(\mathcal{L}) \int_a^b x(t)\, dt = \lim_{n\to\infty} \int_a^b x_n(t)\, dt.$$

Los elementos del espacio $L_1[a, b]$ son funciones $x(t)$ para las cuales

$$(\mathcal{L}) \int_a^b |x(t)|\, dt < \infty.$$

Sea $\widetilde{L}_p[a, b]$ un espacio de funciones continuas sobre $[a, b]$ con la norma

$$\|x\| = \left[\int_a^b |x(t)|^p\, dt\right]^{1/p}, \quad p > 1.$$

El espacio $\tilde{L}_p[a, b]$ no es completo, su completación se denota $L_p[a, b]$. Los elementos de $L_p[a, b]$ son funciones $x(t)$ para las cuales

$$(\mathscr{L}) \int_a^b |x(t)|^p dt < \infty.$$

El espacio $L_2[a, b]$ en tanto la completación del espacio euclídeo $\tilde{L}_2[a, b]$ es *de Hilbert*; el producto escalar en él posee la forma

$$(x, y) = (\mathscr{L}) \int_a^b x(t) y(t) dt.$$

Sea $\tilde{H}^1[a, b]$ un espacio de funciones continuamente diferenciables sobre $[a, b]$ con el producto escalar

$$(x, y) = \int_a^b [x(t) y(t) + x'(t) y'(t)] dt.$$

Este espacio no es completo; su completación es un espacio de Hilbert llamado *espacio de Sóbolev* y denotado $H^1[a, b]$. Los elementos, que al completar el espacio $\tilde{H}^1[a, b]$ se le unen, pueden ser identificados como funciones $x(t)$ del espacio $L_2[a, b]$ que tienen *derivadas generalizadas* $x'(t)$.

TEOREMA 4.1. *El espacio* $H^1[a, b]$ *está encajado en el espacio* $C[a, b]$.

4.1. Demostrar que en el espacio $L_1[a, b]$ no se puede introducir el producto escalar coordinado con la norma.

4.2. Demostrar que si $x(t)$, $y(t) \in L_2[a, b]$, entonces $x(t) y(t) \in L_1[a, b]$.

4.3. Dar un ejemplo de una función:

a) $x(t) \in L_2[0, 1]$ tal que $x^2(t) \notin L_2[0, 1]$;

b) $x(t) \in L_1[0, 1]$ tal que $x(t) \notin L_2[0, 1]$.

4.4. Demostrar que toda sucesión $x_n(t)$ $(n \in \mathbf{N})$ convergente en el espacio $C[a, b]$ será convergente también en el espacio $L_p[a, b]$ $(p \geqslant 1)$.

4.5. Dar un ejemplo de una sucesión de funciones $x_n(t)$ $(n \in \mathbf{N})$ continuas sobre $[0, 1]$, convergente en los espacios $L_1[0, 1]$ y $L_2[0, 1]$, pero no convergente en el espacio $C[0, 1]$.

4.6. Demostrar que la sucesión $x_n(t) = n^2 te^{-nt}$ $(n \in \mathbf{N})$ converge puntualmente hacia la función $x(t) \equiv 0$ para cualquier $t \geqslant 0$, pero no converge en el espacio $L_2[0, 1]$.

4.7. Demostrar que un conjunto de funciones continuas lineales a trozos en $[a, b]$, es siempre denso en el espacio $L_p[a, b]$ $(p \geqslant 1)$.

4.8. Demostrar que el espacio $L_p[a, b]$ $(p \geqslant 1)$ es separable

4.9. Hallar el ángulo φ formado por los elementos $x(t) =$ $= \operatorname{sen} t$ e $y(t) = t$ en el espacio $L_2[0, \pi]$.

4.10. Hallar los ángulos del triángulo formado en el espacio $L_2[-1, 1]$ por los elementos $x_1(t) \equiv 0$, $x_2(t) \equiv 1$, $x_3(t) = t$.

4.11. Hallar la norma de la función $x(t) = t^\alpha$ en los espacios $L_p[0, 1]$ $(p \geqslant 1)$, a los que pertenece esta función.

4.12. Ortogonalizar los elementos $x_0(t) \equiv 1$, $x_1(t) = t$, $x_2(t) = t^2$, $x_3(t) = t^3$ en los espacios:

a) $L_2[-1, 1]$; b) $L_2[0, 1]$.

4.13. En el espacio $L_2[0, 1]$ consideremos un conjunto A de funciones que se anulan sobre un cierto intervalo que contiene el punto $t = 0{,}5$ (y depende, en general, de la función). ¿Será A un conjunto cerrado?

4.14. Demostrar que un conjunto de funciones del espacio $L_2[0, 1]$ tales, que casi todos sus valores están en el $[-1, 1]$, es convexo. ¿Es cerrado este conjunto?

4.15. En el espacio $L_2[-1, 1]$, para cualquier $\lambda \in \mathbf{R}$ designemos mediante M_λ un conjunto de todas las funciones continuas $x(t)$ para las cuales $x(0) = \lambda$. Demostrar que todo M_λ es convexo y siempre denso en el espacio $L_2[-1, 1]$.

4.16. Demostrar que un conjunto de polinomios $P(t)$, tales que $P(1) = 0$, es convexo y siempre denso en el espacio $L_2[0, 1]$.

4.17. Demostrar que un conjunto de funciones escalonadas es convexo y siempre denso en el espacio $L_2[a, b]$.

4.18. Sea $[c, d] \subset [a, b]$. Demostrar que el conjunto $M = \{x(t) \in L_2[a, b]: x(t) = 0$ casi en todos los puntos de $[c, d]\}$ es un subespacio del espacio $L_2[a, b]$. Describir el subespacio $M^\perp$.

4.19. Demostrar que en el espacio $L_2[0, 1]$ el conjunto

$$M = \left\{x(t) \in L_2[0, 1]: \int_0^1 x(t)\,dt = 0\right\}$$

es un subespacio. Describir el subespacio $M^\perp$.

4.20. Demostrar que la aplicación idéntica $Jx = x$ realiza el encaje del espacio $C[a, b]$ en el espacio $L_p[a, b]$ para cualquier $p \geqslant 1$.

4.21. Demostrar que la aplicación idéntica $Jx = x$ realiza el encaje del espacio $L_p[a, b]$ en el espacio $L_s[a, b]$ si $1 \leqslant s \leqslant p$.

4.22. Demostrar que un conjunto de polinomios es siempre denso en el espacio $H^1[a, b]$.

4.23. Sean $x(t) \in H^1[a, b]$, $y(t) \in C^1[a, b]$. Demostrar que $x(t)\, y(t) \in H^1[a, b]$.

4.24. Hallar el ángulo φ formado por los elementos $x(t) = \operatorname{sen} t$ e $y(t) = t$ en el espacio $H^1[0, \pi]$.

4.25. Ortogonalizar el sistema de elementos $x_0(t) \equiv 1$, $x_1(t) = t$, $x_2(t) = t^2$, $x_3(t) = t^3$ en el espacio $H^1[-1, 1]$.

4.26. Demostrar que el sistema de funciones

$$1,\ \operatorname{sen}\frac{2\pi k(t-a)}{b-a},\ \cos\frac{2\pi k(t-a)}{b-a},\ k \in \mathbf{N},$$

es ortogonal en el espacio $H^1[a, b]$.

4.27. Demostrar que el conjunto

$$\overset{\circ}{H}{}^1[a, b] = \{x(t) \in H^1[a, b]:\ x(a) = x(b) = 0\}$$

es un subespacio en el espacio $H^1[a, b]$. Describir el subespacio $(\overset{\circ}{H}{}^1[a, b])^{\perp}$.

4.28. Demostrar que el conjunto

$$M = \{x(t) \in H^1[a, b]:\ x(a) = x(b)\}$$

es un subespacio en el espacio $H^1[a, b]$. Describir el subespacio $M^{\perp}$.

4.29. Demostrar que el conjunto

$$M = \left\{x(t) \in H^1[a, b]:\ \int_a^b x(t)\, dt = 0\right\}$$

es un subespacio en el espacio $H^1[a, b]$. Describir el subespacio $M^{\perp}$.

4.30. Demostrar que para que una función $x(t)$ del espacio $L_2[0, \pi]$ pertenezca al subespacio $\overset{\circ}{H}{}^1[0, \pi] = \{x(t) \in H^1[0, \pi]:\ x(0) = x(\pi) = 0\}$, es necesario y suficiente que converja la serie $\sum_{k=1}^{\infty} k^2 b_k^2$, donde $b_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x(t) \operatorname{sen} kt\, dt$

($k \in \mathbf{N}$). Además,

$$\| x \|^2_{\mathring{W}_2^1[0,\,\pi]} = \int_0^{\pi} [x^2(t) + x'^2(t)]\, dt = \frac{\pi}{2} \sum_{k=1}^{\infty} (k^2 + 1)\, b_k^2.$$

4.31. ¿Cuáles funciones entre las $x(t) = \operatorname{sgn} t$ e $y(t) = |t|$ pertenecen al espacio $W_2^1[-\pi, \pi]$?

4.32. Demostrar que el encaje del espacio $W_2^1[0, \pi]$ en el espacio $C[0, \pi]$ es estricto, es decir, existe una función $x(t) \in W_2^1[0, \pi]$ continua sobre $[0, \pi]$.

§ 5. Construcción del elemento de la aproximación óptima en los espacios de Hilbert y de Banach

Sean X un espacio normado lineal, L un subespacio de X, $x \in X$. Si existe tal elemento $u^* \subset L$, que $\rho(x, L) = \| x - u^* \|$, u^* se denomina *elemento de la aproximación óptima de* x por los elementos de L.

TEOREMA 5.1. *Si L es de dimensión finita, para cualquier $x \in X$ existe el elemento de la aproximación óptima de x por los elementos de L.*

TEOREMA 5.2. *En un espacio estrictamente normado X, para todo $x \in X$ puede existir no más de un elemento de la aproximación óptima de x por los elementos de L.*

En un espacio de Hilbert H, la construcción del elemento de la aproximación óptima para un subespacio de dimensión finita $L \subset H$ se basa en el teorema 3.3. Sea $h_1, h_2, \ldots, h_n$ la base de L; entonces, todo elemento $u^* \in L$ tiene la forma

$$u^* = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k h_k \quad (\lambda_k \in \mathbf{R} \text{ o } \lambda_k \in \mathbf{C} \text{ para } k = 1, 2, \ldots, n)$$

y, según el teorema 3.3, para hallar el elemento de la aproximación óptima debemos resolver (respecto a $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$) el sistema de ecuaciones algebraicas

$$\left(x - \sum_{k=1}^{n} \lambda_k h_k,\ h_j\right) = 0, \quad j = 1, 2, \ldots, n. \tag{1}$$

El sistema (1) siempre tiene solución única, puesto que su determinante es $\Gamma(h_1, h_2, \ldots, h_n) \neq 0$. Si $h_1, h_2, \ldots, h_n$ es la base ortogonal de L el sistema (1) se descompone en ecuaciones separadas que tienen la forma

$$\lambda_j \| h_j \|^2 = (x, h_j), \quad j = 1, 2, \ldots, n;$$

por eso, habitualmente, ortogonalizan la base $h_1, h_2, \ldots, h_n$.

En un espacio de Banach, la construcción del algoritmo eficaz (incluido el numérico) de búsqueda del elemento de la aproximación óptima, provoca grandes dificultades. Por eso, en vez de resolver el problema de la aproximación en el espacio de Banach lo resuelven habitualmente, en el espacio de Hilbert encajado en este espacio de Banach. En el caso del espacio $C[a, b]$, en virtud del teorema 4.1. del encaje de $H^1[a, b]$ en $C[a, b]$ y de la definición del encaje, existe tal $\beta \in \mathbf{R}$, $\beta > 0$, que para cualquier $x \in H^1[a, b]$ se cumple la desigualdad $\| x \|_{C[a, b]} \leqslant \beta \| x \|_{H^1[a, b]}$. Sean $L \subset C[a, b]$ un subespacio con la base de funciones continuamente diferenciables, $x \in H^1[a, b]$, u^* el elemento de la aproximación óptima de x por los elementos de L hallado por medio del sistema (1). Entonces, $\| x - u^* \|_{C[a, b]} \leqslant \beta \| x - u^* \|_{H^1[a, b]}$ y para la norma suficientemente pequeña $\| x - u^* \|_{H^1[a, b]}$ el elemento u^* aproxima x con buena precisión en el espacio $C[a, b]$.

5.1. Sean X un espacio normado lineal, L un subespacio de X, $x \in X$ $y \in L$. Demostrar que $\rho(x, L) = \rho(x + y, L)$.

5.2. Sean X un espacio normado lineal, L un subespacio de X, $x \in X$ y existe más de un elemento de la aproximación óptima de x por los elementos de L. Demostrar que existe un conjunto infinito de estos elementos.

5.3. Sean X un espacio normado lineal real, x, $y \in X$. Demostrar que para $t \in \mathbf{R}$ la función $\varphi(t) = \| x - ty \|$ llega a su cota inferior exacta.

5.4. Demostrar que en el espacio c^2 el conjunto de los elementos de la aproximación óptima del elemento $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ por los elementos del subespacio $L = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha \end{pmatrix}, \alpha \in \mathbf{R} \right\}$ tiene la forma $u^* = \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha \end{pmatrix}$, donde $\alpha \in [-1, 1]$.

5.5. En el espacio $C[0, 1]$ consideremos el subespacio $L = \{x(t) \in C[0, 1]: x(0) = 0\}$. Sea $x(t) \equiv 1$. Describir el conjunto de elementos de la aproximación óptima de x por los elementos de L.

5.6. En el espacio $C[0, 1]$ hallar la distancia:

a) entre el elemento $x_0(t) = t$ y el subespacio de polinomios de grado nulo;

b) entre el elemento $x_1(t) = t^2$ y el subespacio de polinomios de grado $\leqslant 1$.

5.7. Sean L un subespacio de n dimensiones con base $h_1, h_2, \ldots, h_n$ en un espacio de Hilbert H, $x \in H$ un elemento arbitrario. Demostrar que la variable $\rho^2(x, L)$ puede ser representada como la razón, de dos determinantes de Gram:

$$\rho^2(x, L) = \frac{\Gamma(x, h_1, h_2, \ldots, h_n)}{\Gamma(h_1, h_2, \ldots, h_n)}.$$

5.8. Sean L un subespacio unidimensional en un espacio de Hilbert H, $a \in L$, $a \neq 0$. Demostrar que para cualquier $x \in H$

$$\rho(x, L^{\perp}) = \frac{|(x, a)|}{\|a\|}.$$

5.9. En el espacio $L_2[0, 1]$ hallar la distancia entre el elemento $x(t) = t^2$ y el subespacio

$$L = \left\{x(t) \in L_2[0, 1]: \int_0^1 x(t)\, dt = 0\right\}.$$

5.10. En el espacio l_2 hallar la distancia $\rho_n(x, L)$ entre el elemento $x = (1, 0, 0, \ldots 0, \ldots)$ y el subespacio

$$L = \{x \in l_2,\ x = (x_1, x_2, \ldots): \sum_{k=1}^{n} x_k = 0\}$$

¿A qué equivale el $\lim\limits_{n\to\infty} \rho_n(x, L)$?

5.11. En el espacio $L_2[0, 1]$ hallar la proyección del elemento $x(t) = t^3$ sobre el subespacio de polinomios de grado $m \leqslant n$, si $n = 0, 1, 2$.

5.12. Empleando para una función $x(t)$ continuamente diferenciable sobre $[0, 1]$ la representación

$$x(t) = \int_0^1 x(\tau)\, d\tau + \int_0^t \tau x'(\tau)\, d\tau - \int_t^1 (1-\tau)\, x'(\tau)\, d\tau,$$

demostrar que al encajar el espacio $H^1[0, 1]$ en el espacio $C[0, 1]$ a la constante β se la puede tomar igual a $2\sqrt{3}/3$.

5.13. Emplear el teorema del encaje en el problema 5.6.

5.14. Sea $H_p[0, 1]$ un espacio de Hilbert de funciones sumables con el cuadrado en $[0, 1]$, en el cual el producto escalar tiene la forma de

$$(x, y) = \int_0^1 x(t)\, y(t)\, p(t)\, dt,$$

donde $p(t)$ es continua sobre $[0, 1]$ y $p(t) > 0$ sobre $[0, 1]$. Hallar el elemento de la aproximación óptima de x por los elementos del subespacio L de polinomios de grado $n \leqslant 3$ para la función dada $x(t) \in H_p[0, 1]$. Formular y calcular en una computadora el algoritmo de solución de este problema, previendo:

1) la ortogonalización de la base L (calcular los integrales según la fórmula de Simpson con paso 0,05);

2) la salida a impresión de los coeficientes del polinomio $u^*(t)$ según los grados de t y de la variable $\rho(x, L) = \| x - u^* \|_{H_p[0, 1]}$;

3) en el caso cuando la func ón ponderante $p(t)$ depende del parámetro α, investigar la dependencia $\rho(x, L)$ de α para $\alpha \in [0, 1]$ que cambia su valor con el paso 0, 1;

4) trazar los gráficos de $x(t)$ y del elemento de la aproximación óptima $u^*(t)$ (en las variantes con el parámetro, sólo para $\alpha = 0$ y $\alpha = 1$);

5) verificar que los algoritmos se han formulado correctamente para la variante $x(t) = t^3$, $p(t) \equiv 1$.

Considerar las variantes:

a) $x(t) = \sqrt[3]{1 + t^2}$, $p(t) = 1 + \alpha t^2$;

b) $x(t) = \operatorname{sen} 3\pi t$, $p(t) = 1 + t^3$;

c) $x(t) = 2\sqrt{1 + t}$, $p(t) = \sqrt{1 + \alpha t^2}$;

d) $x(t) = \ln(1 + t^2)$, $p(t) = 1 + t^2$;

e) $x(t) = 2^{1+t}$, $p(t) = 1 + t\sqrt{t}$;

f) $x(t) = \sqrt[3]{1 + t}$, $p(t) = 1 + \alpha e^t$;

g) $x(t) = \operatorname{sen} 4\pi t$, $p(t) = 1 + \alpha e^t$;

h) $x(t) = \ln(1 + t^2)$, $p(t) = 1 + \alpha\sqrt{t}$;

i) $x(t) = \operatorname{ch} t$, $p(t) = 1 + t$;

j) $x(t) = e^t - 2$, $p(t) = \sqrt{1 + t}$.

5.15. En los espacios $C[0, 1]$ y $L_2[0, 1]$ consideremos el subespacio L de los polinomios de grado $n \leqslant g$. Para la función $x(t)$ dada, continuamente diferenciable sobre $[0, 1]$, hallar el elemento de la aproximación óptima de x por los elementos de $L_1 u^*(t)$ en la norma $L_2[0, 1]$, y de $v^*(t)$ en la norma $H^1[0, 1]$. Elaborar y realizar en una computadora el algoritmo de resolución de este problema, previendo:

1) el cálculo de los elementos de la matriz y los segundos miembros del sistema (1) según la fórmula de Simpson con paso 0,05;

2) la resolución del sistema (1) por el método de Gauss;

3) la salida a impresión de los coeficientes de los polinomios $u^*(t)$, $v^*(t)$ y de los valores $\| x - u^* \|_{L_2[0,\,1]}$, $\| x - v^* \|_{H^1[0,\,1]}$;

4) la construcción de los gráficos $x(t)$, $u^*(t)$, $v^*(t)$;

5) la verificación de que el algoritmo compuesto para la variante $x(t) = t^4$, es correcto.

Considerar las variantes

a) $x(t) = 3^t$,
b) $x(t) = \cos \pi t$;
c) $x(t) = e^t$;
d) $x(t) = \operatorname{sen} \pi t$;
e) $x(t) = \cos 2\pi t$;
g) $x(t) = t\sqrt{t}$;
h) $x(t) = \operatorname{sen} 4\pi t$;
i) $x(t) = \ln(1+t)$;
j) $x(t) = \operatorname{tg}(t - 0{,}5)$;
k) $x(t) = (1 - 2t^2)^3$.

5.16. Sea $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_{n-2} < t_{n-1} = b$, una partición del segmento $[a, b]$. Decimos que dos funciones continuas sobre $[a, b]$ son de una misma clase, si coinciden en todos los puntos de la partición.

a) Demostrar que el conjunto de clases forma un espacio lineal H_n de n dimensiones. Comparar esto con el problema 2.28.

b) Sean x e y representantes de distintas clases de H_n. Demostrar que la relación

$$(x, y) = \sum_{k=0}^{n-1} x(t_k)\, y(t_k)$$

da en H_n un producto escalar.

c) Demostrar que para $k < n$, las clases engendradas por funciones $x_j(t) = t^j$ $(j = 0, 1, \ldots, k-1)$ son linealmente independientes, de modo que la cápsula lineal de estas clases es un subespacio $L_k \subset H_n$ de dimensión $k + 1$.

d) Demostrar que para cualquier función $x(t)$ continua sobre $[a, b]$ existe un polinomio $G(t)$ de grado no mayor de $n - 1$ y que coincide con $x(t)$ en todos los puntos de la partición.

e) Cerciorarse de que en calidad de $G(t)$ se puede tomar el *polinomio de interpolación de Lagrange*:

$$G(t) = \sum_{k=0}^{n-1} x(t_k) \times$$

$$\times \frac{(t-t_0)(t-t_1)\ldots(t-t_{k-1})(t-t_{k+1})\ldots(t-t_{n-1})}{(t_k-t_0)(t_k-t_1)\ldots(t_k-t_{k-1})(t_k-t_{k+1})\ldots(t_k-t_{n-1})}.$$

5.17. En los datos del problema 5.16 para $a = 0$, $b = 1$, $t_k = k/(n-1)$, $(k = 0, 1, \ldots, n-1)$ consideremos la clase engendrada por la función $x(t) = t^3$. Sean u_0^*, u_1^*, u_2^* elementos de la aproximación óptima de esta clase que corresponden a elementos de los subespacios L_0, L_1, L_2 en la norma H_n; $u_0^*(t)$, $u_1^*(t)$, $u_2^*(t)$, polinomios de grado nulo, primero y segundo, respectivamente, que engendran las clases u_0^*, u_1^*, u_2^*. Elaborar y realizar en una computadora, para $j = 0, 1, 2$, el algoritmo de búsqueda de $u_j^*(t)$ que prevé para n entero que cambia su valor de 5 a 15 con el paso 1:

1) ortogonalizar el sistema de clases engendradas por las funciones $x_0(t) \equiv 1$, $x_1(t) = t$, $x_2(t) = t^2$;

2) trazar los gráficos $x(t)$ y $u_j^*(t)$ $(j = 0, 1, 2)$ para $n = 5$, $n = 10$, $n = 15$;

3) la salida a impresión de los coeficientes de polinomios $u_j^*(t)$ $(j = 0, 1, 2)$ según los grados de t y las variables $\rho(x, L_0)$, $\rho(x, L_1)$, $\rho(x, L_2)$.

Comparar los resultados obtenidos con los del problema 5.11.

5.18. En los datos del problema 5.16, sean $n \geqslant 2$ y x un representante de una clase arbitraria de H_n; u^*, el elemento de la aproximación óptima de esta clase por los elementos del subespacio L_1 en la norma H_n.

a) Demostrar que toda función lineal perteneciente a la clase L_1 tiene la forma $u^*(t) = \alpha t + \beta$, donde los coeficientes α, β se determinan por sistema de ecuaciones lineales

$$\alpha \sum_{k=0}^{n-1} t_k + \beta n = \sum_{k=0}^{n-1} x(t_k),$$

$$\alpha \sum_{k=0}^{n-1} t_k^2 + \beta \sum_{k=0}^{n-1} t_k = \sum_{k=0}^{n-1} t_k x(t_k).$$

(En la teoría de las probabilidades este sistema se llama *normal* y se deduce del método de cuadrados mínimos).

b) Para $a = 0$, $b = \pi$, $t_k = k\pi/(n-1)$ $(k = 0, 1, \ldots, n-1)$ y la clase engendrada por la función $x(t) = \operatorname{sen} t$, elaborar un programa de computadora que permita determinar $\alpha = \alpha_n$ y $\beta = \beta_n$ para distintos n. Averiguar por medio de la misma el valor de n, con el cual el desmenuzamiento ulterior de la partición no lleva a cambiar los coeficientes α_n, β_n en más de 0,01.

c) En las condiciones del punto b) hallar $\lim_{n\to\infty} \alpha_n$ y $\lim_{n\to\infty} \beta_n$.

5.19. En los datos del problema 5.16 para $a = 0$, $b = 1$, $t_k = k/(n-1)$ $(k = 0, 1, \ldots, n-1)$ consideremos la clase engendrada por la función $x(t)$ dada. Sea u_n^* el elemento de la aproximación óptima de esta clase por los elementos del subespacio L_5 en la norma H_n, $u_n^*(t) = \sum_{k=0}^{5} \lambda_k t^k$ un polinomio que engendra esta clase. Elaborar y calcular en la computadora el algoritmo de búsqueda de $u_n^*(t)$ que prevé, para n entero, un cambio de su valor de 6 a 15 con paso 1:

1) ortogonalizar el sistema de clases engendradas por las funciones $x_j(t) = t^j$ $(0 \leqslant j \leqslant 5)$;

2) trazar los gráficos $x(t)$, $u_n^*(t)$ para $n = 6, 9, 12, 15$;

3) la salida a impresión de los coeficientes del polinomio $u_n^*(t)$ según los grados de t y de la variable $\rho(x, L)$ para distintos n.

Considerar las variantes:

a) $x(t) = \operatorname{sen} 4\pi t$;
b) $x(t) = \sqrt{1+t^3}$;
c) $x(t) = \operatorname{sen}(t+t^2)$;
d) $x(t) = \ln(1+t)$;
e) $x(t) = \cos 4\pi t$;
f) $x(t) = \operatorname{sen} \pi t$;
g) $x(t) = e^t$;
h) $x(t) = \sqrt{t}$;
i) $x(t) = t^6$;
j) $x(t) = \operatorname{tg}(t - 0{,}5)$.

§ 6. Espacios métricos

Un conjunto X se denomina *espacio métrico* si para todo par de elementos $x, y \in X$ se ha puesto en correspondencia un número real $\rho(x, y)$ llamado *métrica* o *distancia* tal, que se cumplan los tres axiomas siguientes:

1) $\rho(x, y) \geqslant 0$; $\rho(x, y) = 0$ si, y sólo si, $x = y$;

2) $\rho(x, y) = \rho(y, x)$;

3) $\rho(x, y) \leqslant \rho(x, z) + \rho(y, z)$ («axioma del triángulo»).

Todo espacio normado lineal es métrico. La métrica se introduce en él por la igualdad $\rho(x, y) = \| x - y \|$. De modo análogo a los §§ 1, 2, en el espacio métrico se introducen los conceptos de bola abierta $S_r(x_0) = \{x \in X: \rho(x, x_0) < r\}$, de bola cerrada, de conjuntos cerrado y abierto,

sucesiones convergente y fundamental, espacio métrico completo. En el espacio métrico se pueden plantear y resolver la mayor parte de los problemas de los §§ 1, 2. Los problemas dados a continuación ilustran peculiaridades de los espacios métricos en comparación con los normados lineales.

6.1. Sea X un conjunto arbitrario. Demostrar que

$$\rho(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{para } x = y, \\ & \text{para } x \neq y \end{cases}$$

define la métrica en X. Demostrar que todo subconjunto de X es, simultáneamente, un conjunto cerrado y abierto.

6.2. Sea $\rho(x, y)$ una métrica en un conjunto X. Demostrar que las funciones

$$\rho_1(x, y) = \frac{\rho(x, y)}{1 + \rho(x, y)}, \quad \rho_2(x, y) = \ln[1 + \rho(x, y)],$$
$$\rho_3(x, y) = \min\{1, \rho(x, y)\}$$

son también métricas. ¿Qué se puede afirmar sobre la completitud de los espacios obtenidos, si en la métrica $\rho(x, y)$ el conjunto X era un espacio métrico completo?

6.3. ¿Cuáles condiciones debe satisfacer una función continua $u = f(v)$ definida sobre $\mathbf{R}$ para que en la recta real se pueda dar una métrica por medio de la igualdad $\rho(x, y) = |f(x) - f(y)|$?

6.4. ¿Cuáles condiciones debe satisfacer una función continua $u = f(v)$ para que en la métrica $\rho(x, y) = |f(x) - f(y)|$ la recta real sea un espacio métrico completo?

6.5. ¿Será un espacio métrico completo la recta real con la métrica:

a) $\rho(x, y) = |\operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} y|$;

b) $\rho(x, y) = |e^x - e^y|$;

c) $\beta(x, y) = |x^3 - y^3|$?

Si no, descríbase su completación según la métrica correspondiente.

6.6. En el conjunto s de todas las posibles sucesiones $x = (x_1, x_2, \ldots)$ $(x_k \in \mathbf{R}, (x_k \in \mathbf{C})$ pongamos

$$\rho(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} \frac{|x_k - y_k|}{1 + |x_k - y_k|}.$$

a) Demostrar que $\rho(x, y)$ es una métrica.

b) Demostrar que s es un espacio métrico completo.

c) ¿Se puede introducir una norma en el espacio S de tal modo que se cumpla la desigualdad $\rho(x, y) = \| x - y \|$?

d) Dar un ejemplo de una sucesión $x^{(n)} = (x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \ldots)$ $(x_k^{(n)} \in \mathbf{R})$ que converge en el espacio s, pertenece al espacio l_2, pero que no converge en el espacio l_2.

6.7. Demostrar que en todo espacio métrico la adherencia de una bola abierta $\overline{S_r(x_0)}$ está en la bola cerrada $\overline{S}_r(x_0)$, es decir, $\overline{S_r(x_0)} \subset \overline{S}_r(x_0)$. ¿Es posible la inclusión estricta en este caso? Comparar con el problema 1.3.

6.8. Demostrar que en todo espacio métrico X para cualquier $x \in X$ y cualquier $r > 0$ se cumple la desigualdad $0 \leqslant \operatorname{diam} S_r(x) \leqslant 2r$. Dar un ejemplo del espacio métrico X y de un elemento $x \in X$ tal, que $\operatorname{diam} S_1(x) = 0{,}5$. Comparar con el problema 1.4.

6.9. ¿Es posible que en el espacio métrico una bola de radio mayor se encuentre estrictamente dentro de una bola de radio menor? ¿Con qué valores del radio a es posible la inclusión estricta $S_a(x) \subset S_1(y)$? Comparar con el problema 1.5.

6.10. En el conjunto $\mathbf{N}$ de números naturales tomemos

$$\rho(n, m) = \begin{cases} 0 \text{ para } m = n, \\ 1 + \dfrac{1}{n+m} \text{ para } m \neq n. \end{cases}$$

a) Demostrar que $\rho(n, m)$ es una métrica.

b) Demostrar que $\mathbf{N}$ con la métrica $\rho(n, m)$ es un espacio métrico completo.

c) Construir en $\mathbf{N}$ con la métrica $\rho(n, m)$ una sucesión de bolas encajadas cerradas no vacías, cuyos radios no tienden a cero y la cual no tiene un punto que pertenezca, simultáneamente, a todas las bolas. Comparar con el problema 2.26.

6.11. En un conjunto X de todas las posibles sucesiones de números reales para los elementos $x = (n_1, n_2, \ldots, n_k, \ldots)$, $y = (m_1, m_2, \ldots, m_k, \ldots)$, denotemos mediante $k_0(x, y)$ el índice mínimo para el cual $n_k \neq m_k$. Demostrar que:

a) $$\rho(x, y) = \begin{cases} 0 \text{ para } x = y, \\ \dfrac{1}{k_0(x, y)} \text{ para } x \neq y \end{cases}$$

es una métrica en X;

b) el axioma del triángulo se cumple en X en una forma reforzada:

$$\rho(x, z) \leqslant \text{máx } \{\rho(x, y), \rho(y, z)\};$$

c) si $\rho(x, y) \neq \rho(y, z)$, entonces, $\rho(x, z) = \text{máx } \{\rho(x, y), \rho(y, z)\}$;

d) toda bola abierta $S_r(x)$ es, al mismo tiempo, un conjunto cerrado y $S_r(y) = S_r(x)$ para todo $y \in S_r(x)$;

e) toda bola cerrada $\overline{S_r}(x)$ es, al mismo tiempo, un conjunto abierto y $\overline{S_r}(y) = \overline{S_r}(x)$ para cualquier $y \in \overline{S_r}(x)$;

f) si, en X, dos bolas tienen un punto común, una de ellas comprende a la otra;

g) la distancia entre dos bolas abiertas distintas de radio r, contenidas en una bola cerrada de radio r, es igual a r;

h) para que una sucesión $x_n \in X$ sea fundamental es necesario y suficiente que $\rho(x_n, x_{n+1}) \to 0$ para $n \to \infty$;

i) el espacio X es completo;

j) el espacio X es separable.

Capítulo 2

Operadores lineales

§ 7. Continuidad, acotación y norma de un operador lineal

Sean X, Y, espacios normados lineales; $F\colon X \to Y$, una aplicación u *operador* definido en un entorno del punto $x_0 \in X$. Se llama *continuo en el punto* x_0 si $F(x) \to F(x_0)$ para $x \to x_0$.

Sea F un operador con *campo de definición* $D(F) \subset X$ y *campo de valores* $R(F) \subset Y$. Se llama *acotado* si transforma cualquier conjunto acotado de $D(F)$ en un conjunto acotado en el espacio Y.

Sean X, Y operadores normados lineales, ambos reales o ambos complejos. Un operador $A\colon X \to Y$ con campo de definición $D(A) \subset X$ se llama *lineal* si $D(A)$ es una variedad lineal en X y para cualquier $x,\ y \in D(A)$, así como para cualesquiera $\lambda_1,\ \lambda_2 \in \mathbf{R}$ ($\lambda_1,\ \lambda_2,\ \in \mathbf{C}$) se cumple la igualdad $A(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) = \lambda_1 A x_1 + \lambda_2 A x_2$.

Un conjunto $N(A) = \{x \in D(A)\colon A(x) = 0\}$ se denomina *conjunto de ceros* o *núcleo* del operador A.

TEOREMA 7.1. *Un operador lineal $A\colon X \to Y$, dado sobre todo el X y continuo en el punto $0 \in X$ es continuo en cualquier punto $x_0 \in X$.*

Un operador lineal $A\colon X \to Y$ con $D(A) = X$ se llama *continuo* si es continuo en el punto $0 \in X$. Un operador lineal $A\colon X \to Y$ con $D(A) = X$ se llama *acotado* si existe $c \in \mathbf{R}$, $c > 0$ tal que para cualquier $x \in \overline{S}_1(0)$ es válida la desigualdad $\| Ax \| \leqslant c$.

TEOREMA 7.2. *Un operador lineal $A\colon X \to Y$ con $D(A) = X$ es acotado si, y sólo si, para cualquier $x \in X$ se cumple la desigualdad $\| Ax \| \leqslant c \| x \|$.*

TEOREMA 7.3. *Un operador lineal $A\colon X \to Y$ con $D(A) = X$ es continuo si, y sólo si, es acotado.*

Un número $\| A \| = \sup\limits_{x \in X,\ \|x\| \leqslant 1} \| Ax \|$ se denomina *norma* del operador lineal acotado $A\colon X \to Y$ con $D(A) = X$.

7.1. Sean X, Y, espacios lineales; $A\colon X \to Y$ un operador lineal, y un sistema de elementos $x_1, x_2, \ldots, x_n \in D(A)$ linealmente dependiente. Demostrar que el sistema $Ax_1, Ax_2, \ldots, Ax_n$ es linealmente dependiente.

7.2. Sean X, Y, espacios lineales; $A\colon X \to Y$ un operador lineal, y un sistema $x_1, x_2, \ldots, x_n \in D(A)$ linealmente independiente. ¿Es cierto que el sistema de elementos $Ax_1, Ax_2, \ldots, Ax_n$ es linealmente independiente?

7.3. Sean X, Y, espacios lineales; $A\colon X \to Y$, un operador lineal. Demostrar que el operador A transforma un conjunto convexo de $D(A)$ en un conjunto convexo en el espacio Y.

7.4. Sean X, Y, espacios lineales; $A\colon X \to Y$, un operador lineal; $B \subset R(A)$, un conjunto convexo; $M = \{x \in D(A)\colon Ax \in B\}$. ¿Será convexo el conjunto M?

7.5. Sean dadas dos normas equivalentes sobre un espacio lineal X, $A\colon X \to X$ es un operador lineal. Demostrar que en ambas normas, A será simultáneamente acotado o no acotado.

7.6. Demostrar que un operador que realiza: a) el isomorfismo de espacios normados lineales X e Y; b) el encaje de un espacio normado lineal X en otro normado lineal Y, es acotado.

7.7. Demostrar que el operador π que aplica un espacio normado lineal X en el espacio cociente X/L (véase el problema 2.28) y pone la clase de equivalencia en correspondencia a un elemento $x \in X$ comprendido en esta última, es lineal acotado.

7.8. Sean X, Y, espacios normados lineales; $A\colon X \to Y$, un operador lineal acotado con $D(A) = X$. Demostrar que

$$\| A \| = \sup_{x \in X,\ x \neq 0} \frac{\| Ax \|}{\| x \|}.$$

7.9. Demostrar que un operador lineal $A\colon X \to Y$ con $D(A) = X$ es acotado si, y sólo si, existe $c \in \mathbf{R}$ $c > 0$, tal que para cualquier $x \in S_1(0) \subset X$ se cumple la desigualdad $\| Ax \| \leqslant c$. Si se cumple esta condición,

$$\| A \| = \sup_{x \in X,\ \| x \| = 1} \| Ax \|.$$

7.10. Demostrar que para un operador lineal acotado $A\colon X \to Y$ con $D(A) = X$ es válida la igualdad $\| A \| = \inf c$, donde c es un número tal que $\| Ax \| \leqslant c \| x \|$ para cualquier $x \in X$.

7.11. Sea H un espacio de Hilbert, $A\colon H \to H$ un operador lineal acotado con $D(A) = H$. Demostrar que

$$\|A\| = \sup_{x,\, y \in H,\ x \neq 0,\ y \neq 0} \frac{|(Ax, y)|}{\|x\| \cdot \|y\|}.$$

7.12. Demostrar que los siguientes operadores son lineales acotados y hallar sus normas (para los puntos i), k), l) estimar las normas):

a) $A\colon C[0, 1] \to C[0, 1]$, $Ax(t) = \int_0^t x(\tau)\, d\tau$;

b) $A\colon C[-1, 1] \to C[0, 1]$, $Ax(t) = x(t)$;

c) $A\colon C[0, 1] \to C[0, 1]$, $Ax(t) = t^2 x(0)$;

d) $A\colon C[0, 1] \to C[0, 1]$, $Ax(t) = x(t^2)$;

e) $A\colon C^1[a, b] \to C[a, b]$, $Ax(t) = x(t)$;

f) $A\colon C^1[a, b] \to C[a, b]$, $Ax(t) = \frac{dx}{dt}$;

g) $A\colon L_2[0, 1] \to L_2[0, 1]$, $Ax(t) = t \int_0^1 x(\tau)\, d\tau$;

h) $A_\lambda\colon L_2[0, 1] \to L_2[0, 1]$, $A_\lambda x(t) =$

$$= \begin{cases} x(t), & t \leqslant \lambda,\ \lambda \in (0, 1), \\ 0, & t > \lambda,\ \lambda \in (0, 1); \end{cases}$$

i) $A\colon L_2[0, 1] \to L_2[0, 1]$, $Ax(t) = \int_0^t x(\tau)\, d\tau$;

j) $A\colon H^1[0, 1] \to L_2[0, 1]$, $Ax(t) = x(t)$;

k) $A\colon H^1[0, 1] \to H^1[0, 1]$, $Ax(t) = tx(t)$;

l) $A\colon H^1[0, 1] \to L_2[0, 1]$, $Ax(t) = tx(t)$.

7.13. ¿Será acotado el operador $A\colon C[0, 1] \to C[0, 1]$, $Ax(t) = dx/dt$, cuyo campo de definición L es una variedad lineal de funciones continuamente diferenciables sobre $[0, 1]$.

7.14. ¿Será acotado el operador $A\colon H^1[0, 1] \to L_2[0, 1]$, $Ax(t) = dx/dt$?

7.15. ¿Para cuáles funciones $\varphi(t)$ será acotado el operador $Ax(t) = \varphi(t)\, x(t)$ si se considera como actuante:

a) de $C[0, 1]$ en $C[0, 1]$; b) de $\widetilde{L}_2[0, 1]$ en $\widetilde{L}_2[0, 1]$?

7.16. Demostrar que es acotado el operador $A\colon C^h[a, b] \to$

$\to C[a, b]$,

$$Ax(t) = \sum_{i=0}^{k} \varphi_i(t)\, x^{(i)}(t),$$

donde las funciones $\varphi_i(t)$ para $i = 0, 1, \ldots, k$ son continuas sobre $[a, b]$.

7.17. Sean e_n $(n \in \mathbf{N})$ una base ortonormalizada de un espacio de Hilbert H, $\lambda_n \in \mathbf{R}$ $(n \in \mathbf{N})$. Demostrar que si la sucesión λ_n es acotada, las igualdades $Ae_n = \lambda_n e_n$ $(n \in \mathbf{N})$ definen un operador lineal acotado $A: H \to H$ con $D(A) = H$ y $\| A \| = \sup_n | \lambda_n |$.

7.18. Sean X, Y, espacios lineales; $A: X \to Y$, un operador lineal continuo con $D(A) = X$. ¿Existe siempre $x \in X$, $x \neq 0$ tal que $\| Ax \| = \| A \| \cdot \| x \|$?

7.19. Sean X, Y, espacios normados lineales y, además, X es de dimensión finita. Demostrar que todo operador lineal $A: X \to Y$ con $D(A) = X$ es acotado y existe $x \in X$, $x \neq 0$ tal que $\| Ax \| = \| A \| \cdot \| x \|$.

7.20. Sean X, Y, espacios normados lineales, $A: X \to Y$ un operador lineal

a) Demostrar que $R(A)$ es una variedad lineal en Y.

b) ¿Es siempre $R(A)$ un subespacio en Y?

7.21. Sean X, Y, espacios normados lineales; $A: X \to Y$ un operador lineal tal que la variedad $R(A) \subset Y$ es de dimensión finita. ¿Se desprende de aquí que A es un operador acotado?

7.22. Demostrar que el núcleo $N(A)$ de un operador lineal acotado $A: X \to Y$ es un subespacio del espacio X.

7.23. Sean X, Y, espacios normados lineales, $A: X \to Y$ un operador lineal tal, que $N(A)$ es un subespacio en X. ¿Se desprende de aquí que A es un operador acotado?

7.24. Sea $A: X \to Y$, un operador lineal con $D(A) = X$, con la particularidad de que $R(A)$ es de dimensión finita y $N(A)$ es cerrado en X. Demostrar que A es un operador acotado.

7.25. Sean X un espacio normado lineal, $A: X \to X$ un operador lineal acotado con $D(A) = X$. ¿Es cierto que $X = R(A) \oplus N(A)$?

7.26. Sean X un espacio de Banach, $A: X \to X$ un operador lineal isométrico con $D(A) = X$. Demostrar que $R(A)$ es un subespacio en X.

7.27. Sean X un espacio de Banach; $A: X \to X$, un operador lineal acotado con $D(A) = X$ tal, que existe $c \in \mathbf{R}$; un $c > 0$ tal, que para cualquier $x \in X$ se cumple la desi-

gualdad $\| Ax \| \geqslant c \| x \|$. Demostrar que $R(A)$ es un subespacio en X.

7.28. Consideremos el operador A: $C[a, b] \to C[a, b]$, $Ax(t) = \varphi(t) x(t)$, donde $\varphi(t) \in C[a, b]$. ¿Bajo qué condiciones para la función $\varphi \not\equiv 0$ el conjunto $R(A)$ es un subespacio de $C[a, b]$?

7.29. Sean X, Y, espacios de Banach; $A: X \to Y$ un operador lineal acotado con $D(A) = X$. ¿Dan siempre la norma en X las igualdades:

a) $\| x \|_1 = \| Ax \|$;

b) $\| x \|_2 = \| x \| + \| Ax \|$? ¿Será X un espacio de Banach en esta norma?

7.30. En el espacio l_2 consideremos el operador A que transforma el elemento $x = (x_1, x_2, \ldots) \in l_2$ en el elemento $Ax = (\lambda_1 x_1, \lambda_2 x_2, \ldots)$ donde $\lambda_n \in \mathbf{R}$ $(n \in \mathbf{N})$.

a) Demostrar que para cualesquiera λ_n el operador A es lineal.

b) ¿Bajo qué condiciones para la sucesión $\lambda_n D(A)$ coincide con todo el espacio l_2?

c) ¿Bajo qué condiciones para la sucesión λ_n el operador A será acotado y, en este caso, cuál será su norma?

d) Si A es un operador acotado, ¿existe siempre $x \in l_2$, $x \neq 0$ tal que $\| Ax \| = \| A \| \| x \|$?

e) ¿Bajo qué condiciones para la sucesión λ_n el conjunto $R(A)$ es un subespacio de l_2?

7.31. Sean $\alpha \geqslant 0$ fijado, C_α un espacio de Banach de funciones $x(t)$, continuas sobre $[0, +\infty)$, que cumplen la condición $\sup\limits_{(0, +\infty)} e^{\alpha t} | x(t) | < \infty$, con la norma

$$\| x \|_\alpha = \sup_{[0, +\infty)} e^{\alpha t} | x(t) |.$$

Demostrar que:

a) la función $x(t) = t^\sigma e^{-\gamma t} \in C_\alpha$ para $\gamma > \alpha$, $\sigma \geqslant 0$ y

$$\| x \|_\alpha = e^{-\sigma} \left(\frac{\sigma}{\gamma - \alpha} \right)^\sigma;$$

b) la función continua $x(t)$ pertenece al espacio C_α si, y sólo si, existe tal constante $M > 0$ que para cualquier $t \in [0, +\infty)$ se cumple la desigualdad $| x(t) | \leqslant M e^{-\alpha t}$;

c) el operador B de la multiplicación $Bx(t) = b(t) x(t)$, donde $b(t) \in C_\beta$, $\beta \geqslant 0$, es un operador lineal continuo que actúa del espacio C_α en el espacio $C_{\alpha+\beta}$ con tal que $\| B \| = \| b \|_\beta$;

d) el operador integral

$$Ax(t) = \int_0^t e^{-\beta(t-s)} x(s)\, ds$$

para $\beta > \alpha \geqslant \gamma$ es un operador lineal continuo que actúa desde el espacio C_α en el espacio C_γ, con tal que $\| A \| = 1/(\beta - \alpha)$ para $\gamma = \alpha$ y para $\gamma < \alpha$

$$\| A \| = \left[\frac{(\alpha-\gamma)^{\alpha-\gamma}}{(\beta-\gamma)^{\beta-\gamma}} \right]^{1/(\beta-\alpha)}$$

§ 8. Espacio de operadores lineales acotados

Sean X, Y, espacios normados lineales, ambos reales o ambos complejos; A, B, operadores lineales acotados definidos sobre todo el espacio X y con valores pertenecientes a Y. Al suponer, según la definición,

$(A + B)x = Ax + Bx$, $\lambda A(x) = \lambda Ax$, $\| A \| = \sup_{x \in X,\ \| x \| = 1} \| Ax \|$,

obtenemos el *espacio* $\mathcal{L}(X, Y)$ normado lineal de *operadores lineales acotados*.

En el espacio $\mathcal{L}(X, X) = \mathcal{L}(X)$ suponemos, por definición, $(AB)x = A(Bx)$. Por lo tanto, $\mathcal{L}(X)$ pasa a ser una álgebra con unidad, donde ésta es el *operador idéntico* I: $X \to X$, $Ix = x$.

Una sucesión $A_n \in \mathcal{L}(X, Y)$ $(n \in \mathbf{N})$ se llama *uniformemente convergente* hacia el operador $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ y se denota $A_n \to A$ $(n \to \infty)$ si $\| A_n - A \| \to 0$ $(n \to \infty)$. Una sucesión $A_n \in \mathcal{L}(X, Y)$ $(n \in \mathbf{N})$ se llama *fuertemente convergente* hacia el operador $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ y se denota $A_n \to A$ fuertemente $(n \to \infty)$, si para todo $x \in X$ $\| A_n x - Ax \| \to 0$ $(n \to \infty)$.

TEOREMA 8.1. *Si Y es un espacio de Banach, $\mathcal{L}(X, Y)$ es un espacio de Banach.*

TEOREMA 8.2. *Sean X, Y espacios de Banach, $A_y \in \mathcal{L}(X, Y)$ $(n \in \mathbf{N})$ y la sucesión $A_n x$ acotada para cualquier $x \in X$. Entonces, la sucesión $\| A_n \|$ es acotada.*

TEOREMA 8.3. *Sean X, Y, espacios de Banach; $A_n \in \mathcal{L}(X, Y)$ $(n \in \mathbf{N})$. Para que la sucesión A_n con $n \to \infty$ converja fuertemente hacia el operador $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ es necesario y suficiente que:*

1) *la sucesión $\| A_n \|$ sea acotada;*

2) *$A_n \to A$ $(n \to \infty)$ fuertemente en una variedad lineal siempre densa en el espacio X.*

TEOREMA 8.4. *Sean X un espacio normado lineal, Y un espacio de Banach, $A : X \to Y$ un operador lineal y, además, $\overline{D(A)} = X$ siendo el operador A acotado sobre $D(A)$. Entonces existe un operador lineal acotado $\hat{A} \in \mathcal{L}(X, Y)$ tal que $\hat{A}x = Ax$ para cualquier $x \in D(A)$ y $\| \hat{A} \| = \| A \|$.*

Al mismo tiempo, el operador $\hat{A}$ se llama *prolongación* del operador A sobre todo el espacio X.

8.1. Dar un ejemplo de un espacio normado lineal X y de operadores $A, B \in \mathcal{L}(X)$ tales que $AB \neq BA$.

8.2. Sean $A, B \in \mathcal{L}(X, Y)$ operadores no nulos y $R(A) \cap \cap R(B) = 0$. Demostrar que A y B son linealmente independientes.

8.3. Sean $A, B \in \mathcal{L}(X, Y)$ y $R(A) = R(B)$, $N(A) = N(B)$. ¿Se desprende de aquí que $A = B$?

8.4. Sean X, Y, espacios normales lineales; $U \subset X$ un conjunto abierto; $V \subset X$, un conjunto cerrado, $A \in \mathcal{L}(X, Y)$. Las imágenes de estos conjuntos ¿serán conjuntos abierto y cerrado, respectivamente, en Y?

8.5. Sean L un subespacio de un espacio normado lineal X y $M = \{A \in \widetilde{\mathcal{L}}(X, Y): N(A) = L\}$. ¿Será M un subespacio en el espacio $\mathcal{L}(X, Y)$?

8.6. Sean L un subespacio de un espacio normado lineal X y $M = \{A \in \mathcal{L}(X, Y) : N(A) \supset L\}$. ¿Será M un subespacio en $\mathcal{L}(X, Y)$?

8.7. Sean X un espacio normado lineal, $A \in \mathcal{L}(X)$ un operador arbitrario y $N_k = N(A^k)$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$.

a) Demostrar que $N_0 \subset N_1 \subset \ldots \subset N_k \subset N_{k+1} \subset \ldots$

b) Sea que para cierto número natural m por primera vez se tiene $N_m = N_{m+1}$. Demostrar que $N_{m+p} = N_m$ para cualquier p natural.

8.8. Demostrar que la aplicación Φ: $\mathcal{L}(X, Y) \to \mathbf{R}$, $\Phi(A) = \| A \|$ es continua.

8.9. Sean X un espacio normado lineal y $A \in \mathcal{L}(X)$ un operador fijado. ¿Forman un subespacio en el espacio $\mathcal{L}(X)$ todos los posibles operadores $B \in \mathcal{L}(X)$ que cumplen la condición:

a) $AB = 0$; b) $AB = BA$?

8.10. Demostrar que al sustituir las normas en espacios normados lineales X e Y por las equivalentes, la nueva norma en el espacio $\mathcal{L}(X, Y)$ será equivalente a la vieja.

8.11. Sean X, Y espacios de Banach, $A_n, A \in \mathcal{L}(X, Y)$ $(n \in \mathbf{N})$ y $A_n \to A$ $(n \to \infty)$ fuertemente sobre una variedad

lineal siempre densa en el espacio X. ¿Se desprende de esto que $A_n \to A$ $(n \to \infty)$ *fuertemente*?

8.12. Sean H un espacio de Hilbert, $A_n \in \mathcal{L}(H)$ $(n \in \mathbf{N})$ y $\sup_n |(A_n x, y)| < \infty$ para cualesquiera $x, y \in H$. Demostrar que $\sup_n \|A_n\| < \infty$.

8.13. Sean X, Y, espacios de Banach, y un conjunto $M \in \mathcal{L}(X, Y)$ tal, que

$$\sup_{A \in M} \|Ax\| = \varphi(x) < \infty$$

para cualquier $x \in X$. Demostrar que $\sup_{A \in M} \|A\| < \infty$.

8.14. Sean X, Y, espacios de Banach; $A_n \in \mathcal{L}(X, Y)$ $(n \in \mathbf{N})$, y la sucesión $A_n x$ sea fundamental para cualquier $x \in X$. Demostrar que existe un operador $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ tal que $A_n \to A$ $(n \to \infty)$ fuertemente.

8.15. En el espacio $C[-\pi, \pi]$ consideremos un subespacio M de funciones $x(t)$ que verifican la condición $x(-\pi) = x(\pi)$. Para $x(t) \in M$ pongamos

$$y_n(t) = A_n x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos kt + b_k \operatorname{sen} kt,$$

donde

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x(t) \cos kt \, dt, \quad b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x(t) \operatorname{sen} kt \, dt;$$

por tanto, se ha puesto en correspondencia a cada función $x(t) \in M$ la suma parcial de su serie de Fourier.

a) Demostrar que

$$y_n(t) = A_n x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x(\tau) \frac{\operatorname{sen}[(2n+1)(\tau - t)/2]}{\operatorname{sen}[(\tau - t)/2]} \, d\tau.$$

b) Demostrar que $A_n \in \mathcal{L}(M)$ y

$$\|A_n\| = \max_{t \in [-\pi, \pi]} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left| \frac{\operatorname{sen}[(2n+1)(\tau - t)/2]}{\operatorname{sen}[(\tau - t)/2]} \right| d\tau.$$

c) Sea $L \subset C[-\pi, \pi]$ un subespacio de polinomios trigonométricos. Demostrar que la sucesión A_n para $n \to \infty$ converge fuertemente sobre L hacia el operador idéntico.

d) Supongamos que $\| A_n x - x \| \to 0$ para cualquier $x(t) \in M$ para $n \to \infty$. Deducir de aquí que $\sup_n \| A_n \| < \infty$

e) Elaborar y calcular en una computadora un algoritmo de $\| A_n \|$ para distintos n. ¿Confirma la suposición d) los resultados de los cálculos?

8.16. Sea $t_k = k/n$ $(k = 0, 1, \ldots, n)$ una partición del segmento $[0, 1]$, $x(t) \in C[0, 1]$. Pongamos

$$y_n(t) = A_n x(t) = \sum_{k=0}^{n} x(t_k) G_k^{(n)}(t)$$

donde

$$G_k^{(n)}(t) = \frac{(t-t_0)(t-t_1)\ldots(t-t_{k-1})(t-t_{k+1})\ldots(t-t_n)}{(t_k-t_0)(t_k-t_1)\ldots(t_k-t_{k-1})(t_k-t_{k+1})\ldots(t_k-t_n)};$$

por tanto, se ha puesto en correspondencia a cada función continua su polinomio de interpolación de Lagrange.

a) Demostrar que $A_n \in \mathcal{L}(C[0, 1])$.

b) Demostrar que $\| A_n \| = \max_{t \in [0, 1]} \sum_{k=0}^{n} | G_k^{(n)}(t) |$.

c) Sea $L \subset C[0, 1]$ una variedad lineal de polinomios. Demostrar que la sucesión A_n para $n \to \infty$ converge fuertemente sobre L hacia el operador idéntico.

d) Supongamos que para cualquier $x(t) \in C[0, 1]$ $\| A_n x - x \| \to 0$ para $n \to \infty$. Deducir de aquí que $\sup_n \| A_n \| < \infty$.

e) Elaborar y calcular en una computadora un algoritmo de $\| A_n \|$ para distintos n. ¿Confirma la suposición d) los resultados de los cálculos?

8.17. Sean X, Y, espacios normados lineales; $A_n \in \mathcal{L}(X, Y)$ $(n \in \mathbf{N})$, y $A_n \to 0$ fuertemente $(n \to \infty)$. ¿Se desprende de aquí que $A_n \to 0$ $(n \to \infty)$ según la norma del espacio $\mathcal{L}(X, Y)$?

8.18. Sean X, Y, espacios normados lineales; $A_n \in \mathcal{L}(X, Y)$ $(n \in \mathbf{N})$, y sea que la sucesión $A_n x$ converja uniformemente sobre la bola $S_1(0) \subset X$. Demostrar que existe un operador $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ tal, que $A_n \to A$ para $n \to \infty$.

8.19. En el espacio l_2 para un elemento $x = (x_1, x_2, \ldots) \in l_2$ pongamos las sucesiones de operadores

$$A_n x = \left(\frac{x_1}{n}, \frac{x_2}{n}, \ldots \right),$$

$$B_n x = (\underbrace{0, 0, \ldots, 0}_{n}, x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots), \quad n \in \mathbf{N}.$$

¿Cuál es el carácter de la convergencia de cada una de las sucesiones?

8.20. Consideremos el operador $A\colon C[0, 1] \to C[0, 1]$,

$$Ax(t) = \int_0^t e^{\tau} x(\tau)\, d\tau$$

y la sucesión de operadores $A_n\colon C[0, 1] \to C[0, 1]$

$$A_n x(t) = \int_0^t \left[\sum_{k=0}^{n} \frac{\tau^k}{k!}\right] x(\tau)\, d\tau, \quad n \in \mathbf{N},$$

¿Converge la sucesión A_n hacia A? ¿Cuál es el carácter de la convergencia?

8.21. Consideremos el operador $A\colon C[0, 1] \to C[0, 1]$,

$$Ax(s) = \int_0^1 e^{st} x(t)\, dt$$

y las sucesiones de los operadores A_n, $B_n\colon C[0, 1] \to$ $\to C[0, 1]$,

$$A_n x(s) = \int_0^1 \left[\sum_{k=0}^{n} \frac{(st)^k}{k!}\right] x(t)\, dt,$$

$$B_n x(s) = \int_{\varepsilon_n}^{1-\varepsilon_n} e^{st} x(t)\, dt, \quad n \in \mathbf{N},$$

donde $\varepsilon_n > 0$, $\varepsilon_n \to 0$ para $n \to \infty$. ¿Convergen las sucesiones A_n y B_n hacia A? ¿Cuál es el carácter de la convergencia?

8.22. En el espacio $C[0, 1]$ consideremos la sucesión de operadores $A_n x(t) = x(t^{1+1/n})$ $(n \in \mathbf{N})$

a) Demostrar que $A_n \in \mathcal{L}(C[0, 1])$.

b) Demostrar que cuando $n \to \infty A_n$ converge fuertemente al operador idéntico.

c) ¿Converge A_n hacia I uniformemente?

8.23. Sean X, Y, espacios normados lineales, x_n, $x \in X$, $x_n \to x$, A_n, $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ $(n \in \mathbf{N})$, $A_n \to A$ cuando $n \to \infty$. Demostrar que $A_n x_n \to Ax$ para $n \to \infty$.

8.24. Sean X, Y, espacios de Banach, $A_n \in \mathcal{L}(X, Y)$ $(n \in \mathbf{N})$ y cuando $n \to \infty$ converge fuertemente hacia un operador $A \in \mathcal{L}(X, Y)$. Demostrar que si x_n, $x \in X$ y $x_n \to$ $\to x$ cuando $n \to \infty$, entonces $A_n x_n \to Ax$ cuando $n \to \infty$.

8.25. Sean X, Y, Z, espacios de Banach; A_n, $A \in \mathscr{L}(X, Y)$, B_n, $B \in \mathscr{L}(Y, Z)$ $(n \in \mathbf{N})$ y cuando $n \to \infty A_n$ converge fuertemente hacia el operador A, B_n converge fuertemente hacia el operador B. Demostrar que cuando $n \to \infty$, $B_n A_n$ converge fuertemente hacia el operador BA.

8.26. Sean X, Y, Z, espacios normados lineales; A_n, $A \in \mathscr{L}(X, Y)$, B_n, $B \in \mathscr{L}(Y, Z)$ $(n \in \mathbf{N})$ y cuando $n \to \infty$ $A_n \to A$, $B_n \to B$. Demostrar que cuando $n \to \infty$ $B_n A_n \to BA$ en el espacio $\mathscr{L}(X, Z)$.

8.27. Poner un ejemplo de un espacio normado lineal X y operadores $A, B \in \mathscr{L}(X)$ tales, que $\| AB \| < \| A \| \| B \|$.

8.28. Sean X un espacio normado lineal, $A \in \mathscr{L}(X)$, B: $X \to X$ un operador no acotado con $D(B)$ siempre denso en X. ¿Puede ser el producto AB:

a) un operador no acotado;

b) un operador acotado?

8.29. Sea X un espacio de Banach, $A \in \mathscr{L}(X)$, $\varphi(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k t^k$ $(\lambda_k \in \mathbf{R})$ una serie de potencias convergente sobre todo el $\mathbf{R}$. Demostrar que la sucesión $S_n = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k A^k$ para $n \to \infty$ tiene el límite $\varphi(A) \in \mathscr{L}(X)$.

8.30. Demostrar que en un espacio de Banach X para cualquier $A \in \mathscr{L}(X)$, están determinados los operadores

$$\operatorname{sen} A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k A^{2k+1}}{(2k+1)!}, \quad \cos A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k A^{2k}}{(2k)!}.$$

8.31. Sea X un espacio de Banach, $A \in \mathscr{L}(X)$. Demostrar que $\| e^A \| \leqslant e^{\|A\|}$. Hallar e^I siendo I el operador idéntico.

8.32. Sea X un espacio de Banach, $A \in \mathscr{L}(X)$. Demostrar que la serie $\sum_{k=0}^{\infty} A^k$ converge en $\mathscr{L}(X)$ si, y sólo si, para cierto k natural se cumple la desigualdad $\| A^k \| < 1$.

8.33. ¿Será separable el espacio $\mathscr{L}(X)$ donde $X = L_2[0, 1]$?

8.34. Sean X, Y, espacios de Banach, $A \in \mathscr{L}(X, Y)$, y sea que para cualquier $y \in Y$ se encuentre un $x \in X$ tal, que $\| Ax - y \| \leqslant \alpha \| y \|$, $\| x \| \leqslant \beta \| y \|$, donde α, $\beta \in \mathbf{R}$, $\alpha < 1$. Demostrar que la ecuación $Ax = y$ para todo $y \in Y$ tiene una solución $x \in X$ que satisface la condición $\| x \| \leqslant \frac{\beta}{1-\alpha} \| y \|$.

8.35. Sean X, un espacio de Banach; L, M, subespacios de X, y sea $X = L \oplus M$. El *operador de proyección* P sobre el subespacio L paralelamente al subespacio M se introduce por la igualdad $Px = u$ donde $x = u + v$, $u \in L$, $v \in M$. Demostrar que P es un operador lineal acotado.

8.36. Sea P: $X \to X$ un operador lineal dado en todo el espacio de Banach X. Demostrar que él es un operador de proyección sobre un subespacio $L \subset X$ paralelamente a un subespacio $M \subset X$ si, y sólo si, P es acotado y satisface la condición $P^2 = P$.

8.37. Demostrar que un operador lineal P, dado en todo el espacio de Banach X, que lo aplica en sí mismo y satisface la condición $P^2 = P$, es acotado (y, por lo tanto, es un operador de proyección sobre un subespacio $L \subset X$ paralelamente al subespacio $M \subset X$) si, y sólo si, las variedades lineales $R(P)$ y $R(I - P)$ son cerradas en el espacio X.

8.38. En el espacio $C[-1, 1]$ consideremos operadores $Ax(t) = \frac{1}{2}[x(t) + x(-t)]$, $Bx(t) = \frac{1}{2}[x(t) - x(-t)]$.

a) Demostrar que A, B son operadores lineales acotados y hallar sus normas.

b) Hallar los operadores A^2, B^2. ¿Son A y B operadores de procección?

8.39. En el espacio de Hilbert H el *operador de proyección ortogonal* sobre el subespacio $L \subset H$ para $x = u + v$, siendo $u \in L$ y $v \in L^{\perp}$ se define por la igualdad $Px = u$. Demostrar que el operador P es acotado y hallar su norma.

8.40. Sean L_1, L_2, subespacios de un espacio de Hilbert H, P_1, P_2, operadores de proyección ortogonal sobre L_1 y L_2, respectivamente. Demostrar que $\| P_1 - P_2 \| \leqslant 1$.

8.41. Sean, L, un subespacio de un espacio de Hilbert H; P un operador de proyección ortogonal sobre L. ¿Qué se puede afirmar sobre un operador $A \in \mathcal{L}(H)$, si para él se cumplen las igualdades:

a) $AP = A$;

b) $PA = A$;

c) $AP = PA$?

8.42. Sean H un espacio de Hilbert; $L \subset H$, una variedad lineal, y A un operador lineal acotado dado sobre L con valores en un espacio de Banach Y. Demostrar que se puede prolongar A sobre todo el H conservando la norma.

8.43. Sea X un espacio de Banach; L, M, subespacios de un espacio de Banach Y tales, que $Y = L \oplus M$. Demostrar que $\mathcal{L}(X, Y) = \mathcal{L}(X, L) \oplus \mathcal{L}(X, M)$.

8.44. Sean L, M, subespacios de un espacio normado lineal X; $X = L \oplus M$; Y, un espacio de Banach. ¿Es cierto que $\mathcal{L}(X, Y) = \mathcal{L}(L, Y) \oplus \mathcal{L}(M, Y)$?

§ 9. Operadores inversos

Sean X, Y, espacios normados lineales; $A: X \to Y$ un operador lineal que aplica $D(A)$ sobre $R(A)$ biunívocamente. Entonces existe el *operador inverso* $A^{-1}: Y \to X$ que aplica $R(A)$ sobre $D(A)$ biunívocamente y también es lineal.

Un operador lineal $A: X \to Y$ se llama *continuamente invertible* si $R(A) = Y$, A^{-1} existe y es acotado, es decir, $A^{-1} \in \mathcal{L}(Y, X)$.

TEOREMA 9.1. *El operador A^{-1} existe y es acotado sobre $R(A)$ si, y sólo si, para una constante $m > 0$ y cualquier $x \in D(A)$ se cumple la desigualdad $\| Ax \| \geqslant m \| x \|$.*

TEOREMA 9.2. *Sean X, Y espacios de Banach, $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ $R(A) = Y$ y sea A invertible. Entonces, A es continuamente invertible.*

TEOREMA 9.3. *Sean X espacio de Banach, $C \in \mathcal{L}(X)$ y $\| C \| < 1$. Entonces, el operador $I - C$ es continuamente invertible y es válida la estimación*

$$\| (I-C)^{-1} \| \leqslant \frac{1}{1 - \| C \|}.$$

TEOREMA 9.4. *Sean X un espacio de Banach, A, $B \in \mathcal{L}(X)$, sea A continuamente invertible y que se cumpla la desigualdad*

$$\| B - A \| \leqslant \| A^{-1} \|^{-1}.$$

Entonces, B es continuamente invertible y es válida la estimación

$$\| B^{-1} \| \leqslant \frac{\| A^{-1} \|}{1 - \| B - A \| \, \| A^{-1} \|}.$$

Sean X, Y, espacios normados lineales, y $A \in \mathcal{L}(X, Y)$. Un operador $A_r^{-1} \in \mathcal{L}(Y, X)$ se llama *inverso derecho* de A si $AA_r^{-1} = I_Y$, un operador $A_l^{-1} \in \mathcal{L}(Y, X)$ se llama *inverso izquierdo* de A, si $A_l^{-1}A = I_X$, donde I_Y e I_X son operadores idénticos en los espacios Y y X respectivamente.

9.1. Sean X, Y, espacios lineales; A: $X \to Y$, un operador lineal que tiene inverso. Demostrar que sistemas de elementos $x_1, x_2, \ldots, x_n$ y $Ax_1, Ax_2, \ldots, Ax_n$, donde $x_1, x_2, \ldots, x_n \in D(A)$, son al unisono linealmente independientes o linealmente dependientes.

9.2. Sean X, un espacio lineal; A: $X \to X$ un operador lineal que satisface la relación $I + \lambda_1 A + \lambda_2 A^2 + \ldots + \lambda_n A^n = 0$ para unos $\lambda_k \in \mathbf{R}$ ($k = 1, 2, \ldots, n$). Demostrar que el operador A^{-1} existe.

9.3. Sean X, un espacio lineal; A, B: $X \to X$, operadores lineales con $D(A) = D(B) = X$ y sea que existan los operadores $(AB)^{-1}$, $(BA)^{-1}$. ¿Se deduce de aquí que existen los opeadores A^{-1}, B^{-1}?

9.4. Sean X, un espacio lineal; A, B: $X \to X$, operadores lineales con $D(A) = D(B) = X$ y sea que existe el operador $(I - AB)^{-1}$. Demostrar que el operador $(I - BA)^{-1}$ existe.

9.5. Sean X, un espacio lineal; A, B: $X \to X$, operadores lineales con $D(A) = D(B) = X$ que satisfacen las relaciones $AB + A + I = 0$ y $BA + A + I = 0$. Demostrar que el operador A^{-1} existe.

9.6. Sean X, un espacio normado lineal; $A, B: X \to X$ oper dores lineales con $D(A) = D(B) = X$ tales, que $AB = BA$.

a) Sea que exista el operador A^{-1}. Demostrar que $A^{-1}B = BA^{-1}$.

b) Sean A, $B \in \mathcal{L}(X)$ y B continuamente invertible. Demostrar que

$$\| AB \| \leqslant \frac{\| A \|}{\| B^{-1} \|}$$

9.7. Sean X, un espacio normado lineal; A, $A^{-1} \in \mathcal{L}(X)$ y sea $k = \| A \| \| A^{-1} \|$ el *número convencional* del operador A. Consideremos la ecuación $Ax = y$ donde $y \in X$, $y \neq 0$. Sea $\bar{x} \in X$ su resolución aproximada. Demostrar que su error relativo puede estimarse según la fórmula

$$\frac{1}{k} \frac{\| A\bar{x} - y \|}{\| y \|} \leqslant \frac{\| \bar{x} - x \|}{\| x \|} \leqslant k \frac{\| A\bar{x} - y \|}{\| y \|}.$$

9.8. Sea X, un espacio normado lineal; A: $X \to X$, un operador lineal, y que en X exista una sucesión $x_n \in D(A)$ ($n \in \mathbf{N}$) tal que $\| x_n \| = 1$ y $Ax_n \to 0$ para $n \to \infty$. Demostrar que el operador A no tiene inverso acotado.

9.9. En el espacio l_2 consideremos un operador A que trasforma un elemento $x = (x_1, x_2, \ldots)$ en el elemento $Ax = (\lambda_1 x_1, \lambda_2 x_2, \ldots)$ donde $\lambda_n \in \mathbf{R}$, $(n \in \mathbf{N})$, $\sup |\lambda_n| < \infty$. ¿Bajo qué condiciones sobre la sucesión λ_n existe el operador inverso A^{-1}? ¿Será acotado A^{-1}?

9.10. En el espacio l_2 consideremos los operadores A, B, que transforman un elemento $x = (x_1, x_2, \ldots) \in l_2$ en $Ax = (0, x_1, x_2, \ldots)$ y $Bx = (x_2, x_3, \ldots)$ respectivamente. ¿Cuáles de los operadores A^{-1}, B^{-1}, A_r^{-1}, B_r^{-1}, A_l^{-1}, B_l^{-1} existen?

9.11. Demostrar que el operador $A: C^1[0, 1] \to C[0, 1]$,

$$Ax(t) = \frac{dx}{dt}$$

tiene el inverso derecho y no tiene el inverso izquierdo.

9.12. En el espacio $C^1[0, 1]$ consideremos el subespacio $L = \{x(t) \in C^1[0, 1]: x(0) = 0\}$ y el operador $A: L \to C[0, 1]$,

$$Ax(t) = dx/dt + a(t)\, x(t), \quad a(t) \in C[0, 1].$$

Demostrar que A es continuamente invertible.

9.13. Consideremos el operador $A: C[0, 1] \to C[0, 1]$,

$$Ax(t) = \int_0^t x(\tau)\, d\tau.$$

a) ¿Qué representa su campo de valores $R(A)$?

b) ¿Existe sobre $R(A)$ el operador inverso A^{-1}? ¿Es acotado este operador?

9.14. Consideremos el operador $A: C[0, 1] \to C[0, 1]$,

$$Ax(t) = \int_0^t x(\tau)\, d\tau + x(t).$$

a) Demostrar que $N(A) = 0$, de modo que para cualquier $y \in C[0, 1]$ la ecuación $Ax = y$ no puede tener más que una resolución.

b) Demostrar que A es continuamente invertible y hallar el operador A^{-1}.

9.15. Demostrar que el operador $A: C[0, 1] \to C[0, 1]$,

$$Ax(t) = x(t) + \int_0^1 e^{s+t} x(s)\, ds$$

es continuamente invertible y hallar el operador A^{-1}.

9.16. Consideremos el operador $A\colon C[0, 1] \to C[0, 1]$,

$$Ax(t) = \frac{d^2x}{dt^2} + x(t)$$

con campo de definición $D(A)$ que es la variedad lineal de funciones $x(t)$ dos veces continuamente diferenciables en $[0, 1]$ y satisfacen las condiciones $x(0) = x'(0) = 0$.

a) Demostrar que A es un operador lineal no acotado.

b) Demostrar que A es continuamente invertible y hallar el operador A^{-1}.

9.17. Consideremos el operador $A\colon C[0, 1] \to C^2[0, 1]$,

$$Ax(t) = \int_0^1 e^{-|s-t|} x(s)\, ds.$$

¿Existe el operador A^{-1}?

9.18. Sean X, un espacio normado lineal; $A\colon X \to X$, un operador lineal con $D(A) = X$ tal, que la serie $\sum_{k=0}^{\infty} A^k x$ converge para todo $x \in X$.

a) Demostrar que existe el operador $(I - A)^{-1}$.

b) Sea, además, $A \in \mathcal{L}(X)$. Demostrar que para todo $x \in X$

$$(I - A)^{-1} x = \sum_{k=0}^{\infty} A^k x.$$

9.19. Sean X, un espacio de Banach; $A \in \mathcal{L}(X)$, e $\| I - A \| < 1$. Demostrar que A es continuamente invertible.

9.20. Sean X, un espacio de Banach complejo; $A \in \mathcal{L}(X)$, $\lambda \in \mathbf{C}$ y $|\lambda| > \| A \|$. Demostrar que el operador $A - \lambda I$ es continuamente invertible.

9.21. Sean X, Y, espacios de Banach; $A \in \mathcal{L}(X, Y)$, y sea que exista el operador A^{-1} acotado sobre $R(A)$. Demostrar que $R(A)$ es un subespacio en el espacio Y.

9.22. Sean X, Y, espacios de Banach; A_n, $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ $(n \in \mathbf{N})$, y sea que cuando $n \to \infty$, A_n converja fuertemente hacia A. Sea también $A_n^{-1} \in \mathcal{L}(Y\ X)$ y $R(A) = Y$. Demostrar que las relaciones de la ecuación $A_n x_n = y$ convergen hacia la resolución de la ecuación $Ax = y$ para todo $y \in Y$ si, y sólo si,

$$\sup_n \| A_n^{-1} \| < \infty.$$

9.23. Sean X, Y, espacios de Banach; A_n, $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ ($n \in \mathbf{N}$) y que $A_n \to A$ cuando $n \to \infty$. Demostrar que para que el operador A sea continuamente invertible es necesario y suficiente que:

a) los operadores A_n sean continuamente invertibles a partir de un cierto número N;

b) la sucesión A_n^{-1} para $n \geqslant N$ sea acotada.

9.24. Sean H, un espacio de Hilbert; $A \in \mathcal{L}(H)$, $R(A) = H$, y que el operador A tenga el único operador inverso derecho acotado A_r^{-1}. Demostrar que A es continuamente invertible.

9.25. Sea X, un espacio de Banach. Demostrar que en el espacio $\mathcal{L}(X)$ el conjunto de todos los operadores continuamente invertibles es abierto.

§ 10. Operadores cerrados

Sean X, Y, espacios de Banach. Su *suma directa* es el espacio de Banach $Z = X \dotplus Y$ de pares $z = (x, y)$ donde $x \in X$, $y \in Y$, con operaciones $\alpha_1 z_1 + \alpha_2 z_2 = (\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2, \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2)$, donde $z_1 = (x_1, y_1)$, $z_2 = (x_2, y_2)$, α_1, α_2, son escalares, y con la norma $\| z \| = \| x \|_X + \| y \|_Y$.

El conjunto de pares $(x, Ax) \subset Z = X \dotplus Y$ se llama *gráfico* del operador lineal A con el campo de definición $D(A) \subset X$ y el campo de valores $R(A) \subset Y$. El operador lineal $A: X \to Y$ se llama cerrado si su gráfico es un conjunto cerrado en el espacio $Z = X \dotplus Y$. O sea, A es cerrado si de $x_n \in D(A)$ ($n \in \mathbf{N}$), $x_n \to x$ y $Ax_n \to y$, se desprende que $x \in D(A)$ y $Ax = y$.

TEOREMA 10.1. *Si $A \in \mathcal{L}(X, Y)$, A es cerrado.*

TEOREMA 10.2. *Si A es cerrado y el operador A^{-1} existe, A^{-1} es cerrado.*

TEOREMA 10.3. *Sea A un operador lineal cerrado con $D(A) = X$. Entonces, A es acotado.*

10.1. Consideremos el operador $A: C[0, 1] \to C[0, 1]$,

$$Ax(t) = x(t)/t$$

con campo de definición $D(A) = \{x(t) \in C[0, 1]: \lim_{t \to +0} t^{-1} x(t) \text{ existe}\}$. Demostrar que A es un operador cerrado.

10.2. Consideremos el operador $A: C[0, 1] \to C[0, 1]$,

$$Ax(t) = dx/dt$$

con el campo de definición $D(A)$ que es una variedad lineal de funciones $x(t)$ continuamente diferenciables en $[0, 1]$ y

satisfacen las condiciones $x(0) = x(1) = 0$. Demostrar que A es un operador cerrado.

10.3. Consideremos el operador $A: C[0, 1] \to C[0, 1]$,

$$Ax(t) = d^2x/dt^2 + x(t)$$

con el campo de definición $D(A)$ que es una variedad lineal de funciones $x(t)$ que son dos veces continuamente diferenciables en $[0, 1]$ y satisfacen las condiciones $x(0) = x'(0) = 0$. Demostrar que A es un operador cerrado no acotado.

10.4. Demostrar que el operador de proyección P sobre el subespacio L de un espacio de Banach X, que actúa paralelamente al subespacio M es cerrado y, por lo tanto, acotado.

10.5. Demostrar que en el espacio $C[a, b]$ el operador $Ax(t) = dx/dt$ definido sobre una variedad lineal de funciones continuamente diferenciables sobre $[a, b]$ es cerrado.

10.6. Demostrar que en la suma directa de espacios de Banach se puede introducir la norma de modos siguientes: $\| z \| = \sqrt{\| x \|^2 + \| y \|^2}$, $\| z \| = (\| x \|^p + \| y \|^p)^{1/p}$, $p \geqslant 1$, $\| z \| = \max \{\| x \|, \| y \|\}$. Demostrar que todas estas normas son equivalentes.

10.7. Demostrar que el gráfico de un operador lineal $A: X \to Y$ es una variedad lineal en el espacio $Z = X \dotplus Y$.

10.8. En el espacio $Z = X \dotplus Y$, ¿toda variedad lineal puede ser el gráfico de un operador lineal?

10.9. Demostrar que un operador lineal acotado $A: X \to Y$ es cerrado si, y sólo si, $D(A)$ es cerrado en X.

10.10. Sea $A: X \to Y$ un operador lineal cerrado. ¿Es cierto que:

a) $D(A)$ es cerrado en X; b) $R(A)$ es cerrado en Y?

10.11. Demostrar que el conjunto de ceros de un operador cerrado es un conjunto cerrado.

10.12. Sea $A: X \to Y$ un operador lineal tal, que $R(A)$ es cerrado en Y y existe un $m \in \mathbb{R}$ $(m > 0)$ tal, que para cualquier $x \in D(A)$ se cumple la desigualdad $\| Ax \| \geqslant m \| x \|$. Demostrar que A es un operador cerrado.

10.13. Sean $A, B: X \to Y$ operadores lineales y, además, sea A cerrado, B acotado y $D(A) \subset D(B)$. Demostrar que $A + B$ es un operador cerrado.

10.14. Sea $A: X \to Y$ un operador lineal cerrado, y, también, $R(A) = Y$ y el operador A^{-1} existe. Demostrar que $A^{-1} \in \mathcal{L}(Y, X)$.

10.15. Sea $A: X \to Y$, un operador lineal. Demostrar que A es cerrado si, y sólo si, $D(A)$ en la norma $\| x \|_1 = \| x \|_X + \| Ax \|_Y$, es un espacio de Banach.

Capítulo 3

Espacios duales y operadores conjugados

§ 11. Funcionales lineales continuas

Sea X un espacio normado lineal. Todo operador $f: X \to Y$ siendo $Y = \mathbf{R}$ o $Y = \mathbf{C}$ se llama *funcional*, además, el valor de la funcional f para el elemento $x \in X$ se denota $\langle x, f \rangle$. En este capítulo se consideran sólo funcionales lineales. Puesto que la funcional lineal es un caso particular del operador lineal, siguen siendo válidos para ésta los conceptos de continuidad, acotación y norma, así como los teoremas de los §§ 7 y 8. El espacio $\mathscr{L}(X, Y)$ de funcionales lineales continuas, donde $Y = \mathbf{R}$ ó $Y = \mathbf{C}$, se llama *dual* a X y se denota mediante X^*. Se llama *hiperplano* a un conjunto $\{x \in X: \langle x, f \rangle = \lambda\}$ donde f es una funcional lineal, $\lambda \in \mathbf{R}$ ($\lambda \in \mathbf{C}$).

11.1. Sean X un espacio lineal complejo, f una funcional lineal definida sobre X no idénticamente igual a cero. Demostrar que el campo de valores de f es todo el $\mathbf{C}$.

11.2. Sean X un espacio normado lineal y $f \in X^*$. Demostrar que:

a) $\|f\| = \sup\limits_{x \in X,\ x \neq 0} \dfrac{|\langle x, f \rangle|}{\|x\|}$;

b) $\|f\| = \sup\limits_{x \in X,\ \|x\| = 1} |\langle x, f \rangle|$;

c) $\|f\| = \sup\limits_{x \in X,\ \|x\| = 1} \langle x, f \rangle$, si el espacio X es real.

11.3. Demostrar que en el espacio $C[-1, 1]$ las siguientes funcionales son lineales continuas y hallar sus normas:

a) $\langle x, f \rangle = \frac{1}{3}[x(-1) + x(1)]$;

b) $\langle x, f \rangle = 2[x(1) - x(0)]$;

c) $\langle x, f \rangle = \sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k x(t_k)$, donde $\alpha_k \in \mathbf{R}$ y los $t_1, t_2, \ldots, t_n \in [-1, 1]$ son fijados;

d) $\langle x, f_\varepsilon\rangle = \frac{1}{2\varepsilon}[x(\varepsilon) + x(-\varepsilon) - 2x(0)]$, $\varepsilon \in [-1, 1]$;

d) $\langle x, f\rangle = \int_0^1 x(t)\,dt$;

f) $\langle x, f\rangle = \int_{-1}^1 x(t)\,dt - x(0)$;

g) $\langle x, f\rangle = \int_{-1}^0 x(t)\,dt - \int_0^1 x(t)\,dt$;

h) $\langle x, f\rangle = \int_{-1}^1 x(t)\,dt - \frac{1}{2n+1}\sum_{k=-n}^{n} x\left(\frac{k}{n}\right)$.

11.4. ¿Estarán acotadas las siguientes funcionales lineales en el espacio $C[0, 1]$

a) $\langle x, f\rangle = \int_0^1 x(\sqrt{t})\,dt$;

b) $\langle x, f\rangle = \int_0^1 x(t^2)\,dt$;

c) $\langle x, f\rangle = \lim_{n\to\infty} \int_0^1 x(t^n)\,dt$?

11.5. Demostrar que las siguientes funcionales son lineales continuas y hallar sus normas:

a) $\langle x, f\rangle = \int_{-1}^1 tx(t)\,dt$, $x \in C[-1, 1]$;

b) $\langle x, f\rangle = \int_0^1 tx(t)\,dt$, $x \in C^1[-1, 1]$;

c) $\langle x, f\rangle = \int_{-1}^1 tx(t)\,dx$, $x \in L_1[-1, 1]$;

d) $\langle x, f\rangle = \int_{-1}^1 tx(t)\,dt$, $x \in L_2[-1, 1]$;

e) $\langle x, f\rangle = \int_0^1 t^{-1/3}x(t)\,dt$, $x \in L_2[0, 1]$;

f) $\langle x, f\rangle = x_1 + x_2,\ x = (x_1, x_2, \ldots) \in l_2$;

g) $\langle x, f\rangle = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x_k}{k},\ x = (x_1, x_2, \ldots) \in l_2$;

h) $\langle x, f\rangle = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x_k}{k},\ x = (x_1, x_2, \ldots) \in l_1$;

i) $\langle x, f\rangle = \sum_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{k}\right) x_k,\ x = (x_1, x_2, \ldots) \in l_1$;

j) $\langle x, f\rangle = x_1 + x_2,\ x = (x_1, x_2, \ldots) \in m$:

k) $\langle x, f\rangle = \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k+1} x_k,\ x = (x_1, x_2, \ldots) \in c_0$;

l) $\langle x, f\rangle = \lim_{n\to\infty} x_n,\ x = (x_1, x_2, \ldots) \in c$.

11.6. ¿Con qué valor de p las funcionales a) y b) del problema 11.4 son continuas en el espacio $L_p\,[0, 1]$?

11.7. ¿Será continua la funcional $\langle x, f\rangle = x'(0)$, si se considera:

a) sobre el espacio $C^1\,[-1, 1]$;

b) sobre una variedad lineal de funciones continuamente diferenciables que es siempre densa en el espacio $C\,[-1, 1]$?

11.8. En el espacio $C^1\,[a, b]$ consideremos el subespacio $L = \{x(t) \in C^1\,[a, b]: x(a) = x(b) = 0\}$.

a) Sean $u(t)$, $v(t)$, $w(t) \in C\,[a, b]$. Demostrar que

$$\langle x, f\rangle = \int_a^b u(t)\, x'(t)\, dt,$$

$$\langle x, g\rangle = \int_a^b [v(t)\, x(t) + w(t)\, x'(t)]\, dt$$

son funcionales lineales continuas sobre el espacio $C^1\,[a, b]$.

b) Sea $\langle x, f\rangle = 0$ para toda $x(t) \in L$. Demostrar que $u(t) = \text{const}$.

c) Sea $\langle x, g\rangle = 0$ para toda $x(t) \in L$. Demostrar que $w(t) \in C^1\,[a, b]$ y $w'(t) = v(t)$.

11.9. Tomando en consideración las funcionales lineales continuas, definidas sobre el espacio $C\,[-1, 1]$ en el problema 11.3, verificar que sólo para algunas $f \in C^*\,[-1, 1]$ existe una $x(t) \in C\,[-1, 1]$, $x(t) \not\equiv 0$, tal que $|\langle x, f\rangle| = \|x\| \cdot \|f\|$.

11.10. En los espacios l_1, c_0 dar ejemplos de funcionales lineales continuas que llegan y que no llegan a su norma sobre una bola unitaria cerrada.

11.11. Sean X un espacio normado lineal, $f \in X^*$ y para una bola $\overline{S}_r(x_0)$

$$\sup_{x,\, y \in \overline{S}_r(x_0)} |\langle x, f\rangle| - \langle y, f\rangle = 1.$$

Hallar $\|f\|$.

11.12. Sean X un espacio normado lineal real, f una funcional lineal definida sobre X. Demostrar que f es continua si, y sólo si, para cualquier $c \in \mathbf{R}$ los conjuntos $\{x \in X: \langle x, f\rangle < c\}$ y $\{x \in X: \langle x, f\rangle > c\}$ son abiertos en el espacio X.

11.13. Sea f una funcional lineal definida sobre un espacio normado lineal X, además, para cualquier sucesión $x_n \in X$ $(n \in \mathbf{N})$ tal, que $x_n \to 0$ para $n \to \infty$, el conjunto $\langle x_n, f\rangle$ es acotado. Demostrar que $f \in X^*$.

11.14. Sea f una funcional lineal no acotada y definida sobre un espacio normado lineal real X. Demostrar que toma todos los valores reales en cualquier entorno de cero.

11.15. Demostrar que una funcional lineal f en un espacio normado lineal X es continua si, y sólo si, su conjunto de ceros (el núcleo) $N(f) = \{x \in X: \langle x, f\rangle = 0\}$ es cerrado en X.

11.16. Sean, X un espacio normado lineal, $f \in X^*$, $f \neq 0$. Demostrar que $X = N(f) \oplus M$, donde M es un subespacio unidimensional.

11.17. Demostrar que dos funcionales lineales continuas definidas sobre un mismo espacio normado lineal y con el conjunto de ceros (el núcleo) común, son proporcionales.

11.18. Sea L un subespacio de X tal, que $L \neq X$ y ningún otro subespacio diferente de L y de X no contiene a L. Demostrar que existe $f \in X^*$ tal, que $L = N(f)$.

11.19. Demostrar que todo hiperplano en un espacio normado lineal es un conjunto convexo.

11.20. Sea f una funcional lineal fijada sobre un espacio normado lineal X. Demostrar que si uno de los hiperplanos es cerrado, los demás también lo son.

11.21. Demostrar que todo hiperplano en un espacio normado lineal X es cerrado en X, o siempre es denso en él.

11.22. Sean, X un espacio normado lineal, $f \in X^*$, $f \neq 0$. En X consideremos el hiperplano $L = \{x \in X: \langle x, f\rangle = 1\}$.

Demostrar que

$$\| f \| = \frac{1}{\inf\limits_{x \in L} \| x \|}.$$

11.23. Sean, X un espacio normado lineal, $f \in X^*$, $L = N(f)$. Demostrar que para cualquier $x \in X$

$$\rho(x, L) = \frac{|\langle x, f \rangle|}{\| f \|}.$$

11.24. Sean, X un espacio normado lineal, $f \in X^*$, $L = N(f)$, $x \in X$, $x \notin L$ y sea que existe un $y \in L$ tal, que $\rho(x, L) = \| x - y \|$. Demostrar que f alcanza su norma sobre una bola unitaria cerrada del espacio X.

11.25. En el espacio $C[-1, 1]$ consideremos el conjunto

$$L = \left\{ x(t) \in C[-1, 1] : \int_{-1}^{0} x(t)\, dt = \int_{0}^{1} x(t)\, dt \right\}.$$

a) Demostrar que L es un subespacio de $C[-1, 1]$ y hallar $f \in C^*[-1, 1]$ tal que $L = N(f)$.

b) Demostrar que para $x(t) \in C[-1, 1]$, $x \notin L$ no existe un $y \in L$, tal, que $\rho(x, L) = \| x - y \|$.

11.26. Para $x = (x_1, x_2, \ldots) \in c_0$ pongamos

$$\langle x, f \rangle = \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k+1} x_k.$$

a) Demostrar que f es una funcional lineal continua sobre el espacio c_0.

b) Sean, $L = N(f)$, $x \in c_0$, $x \notin L$. Demostrar que no existe $y \in L$ tal que $\rho(x, L) = \| x - y \|$.

§ 12. Teorema de Hahn—Banach. Estructura del espacio dual

TEOREMA 12.1. *En un espacio normado lineal real X sea dada una funcional lineal acotada f con $D(f) \subset X$. Entonces existe una funcional lineal acotada $\tilde{f}$, definida en todo el X tal, que $\| \tilde{f} \| = \| f \|$ y $\langle x, \tilde{f} \rangle = \langle x, f \rangle$ para cualquier $x \in D(f)$.*

COROLARIO 1. *Sea $x \in X$, $x \neq 0$. Entonces existe una $f \in X^*$ tal, que $\| f \| = 1$ y $\langle x, f \rangle = \| x \|$.*

COROLARIO 2. *Sean, $L \subset X$ una variedad lineal, $x_0 \in X$, $x_0 \notin L$ y $d = \rho(x_0, L) > 0$. Entonces existe una $f \in X^*$ tal,*

que $\langle x, f\rangle = 0$ *para cualquier* $x \in L$, $\langle x_0, f\rangle = 1$ *y* $\|f\| = 1/d$.

TEOREMA 12.2. *Sea H un espacio de Hilbert. Para cualquier funcional lineal acotada f, dada sobre todo el H, existe el único elemento* $y \in H$, *tal que* $\langle x, f\rangle = (x, y)$ *para cualquier* $x \in H$. Además, $\|f\| = \|y\|$.

TEOREMA 12.3. *Toda funcional lineal acotada f, dada sobre todo el espacio C* $[a, b]$, *se puede representar en forma de una integral de Stieltjes*

$$\langle x, f\rangle = \int_a^b x(t)\, dg(t),$$

donde g (t) es una función de variación acotada sobre $[a, b]$. *Además, para cierta g (t) se cumple la igualdad* $\|f\| = \bigvee_a^b g(t)$.

(La definición de la integral de Stieltjes y la demostración del teorema 12.3 se exponen, por ejemplo, en [15].)

12.1. Sean X un espacio de Banach, $f_n \in X^*$ $(n \in \mathbf{N})$ y sea que para cualquier $x \in X$ exista $\lim_{n\to\infty} \langle x, f_n\rangle = \langle x, f\rangle$. Demostrar que $f \in X^*$.

12.2. Sean, X un espacio normado lineal, $f_n \in X^*$ $(n \in \mathbf{N})$. Demostrar que f_n converge en X^* si, y sólo si, $\langle x, f_n\rangle$ converge uniformemente en la bola $\{x \in X: \|x\| \leqslant 1\}$.

12.3. Sean, X un espacio normado lineal, $x, y \in X$, $x \neq y$. Demostrar que existe una $f \in X^*$ tal, que $\langle x, f\rangle \neq \langle y, f\rangle$.

12.4. Demostrar que en todo espacio normado lineal X para cualquier $\lambda \in \mathbf{R}$ y cualquier $f \in X^*$ no nula, el hiperplano $\{x \in X: \langle x, f\rangle = \lambda\}$ es un conjunto no vacío.

12.5. Sean X un espacio normado lineal y $x \in X$. Demostrar que

$$\|x\| = \sup_{f \in X^*,\ \|f\|=1} |\langle x, y\rangle|.$$

12.6. Sean, X un espacio normado lineal, $x_0 \in X$ y sea para cualquier $f \in X^*$, tal que $\|f\| = 1$, se cumple la desigualdad $|\langle x_0, f\rangle| \leqslant 1$. Demostrar que $\|x_0\| \leqslant 1$.

12.7. Sean, X un espacio normado lineal, $f \in X^*$, $A \in \mathcal{L}(X)$. Demostrar que $\|A\| = \sup |\langle Ax, f\rangle|$, donde la cota superior se toma respecto al conjunto $\{x \in X: \|x\| = 1,\ f \in X^*,\ \|f\| = 1\}$.

12.8. Sean, X un espacio normado lineal, $x_n \in X$ ($n \in \mathbf{N}$) un sistema de elementos fijado, L su cápsula lineal, $x \in X$ un elemento arbitrario. Demostrar que $x \in \overline{L}$ si y sólo si, de $f \in X^*$, $\langle x_k, f\rangle = 0$ para $k \in \mathbf{N}$, se deduce que $\langle x, f\rangle = 0$.

12.9. Demostrar que si un espacio normado lineal X es de dimensión infinita, el espacio X^* también lo es.

12.10. Sean, X un espacio normado lineal, $M \subset X$ un conjunto arbitrario. Hagamos $M^{\perp} = \{f \in X^*: \langle x, f\rangle = 0$ para todo $x \in M\}$.

a) Demostrar que $M^{\perp}$ es un subespacio en el espacio X^*.

b) ¿Qué representa $M^{\perp}$, si X es un espacio de Hilbert?

c) Sea $M \subset X$ un subespacio. Demostrar que $M = \{x \in X: \langle x, f\rangle = 0$ para cualquier $f \in M^{\perp}\}$.

12.11. Sea X un espacio de Banach. Para un conjunto arbitrario $M \subset X$ definimos su *polar*

$$M^* = \{f \in X^*: |\langle x, f\rangle| \leqslant 1 \text{ para cualquier } x \in M\}.$$

Demostrar que M^* es un conjunto cerrado convexo.

12.12. Sean, X e Y espacios normados lineales y $Z = X \dotplus Y$ su suma directa. Demostrar que toda funcional lineal acotada, dada en todo el espacio Z, se representa unívocamente de forma $\langle (x, y), h\rangle = \langle x, f\rangle + \langle y, g\rangle$, donde $f \in X^*$, $g \in Y^*$.

12.13. Sea X un espacio de Banach. Demostrar que si el espacio X^* es separable, X también lo es. ¿Es válida la afirmación inversa?

12.14. Demostrar que en el espacio $C[-1, 1]$ la funcional lineal continua $\langle x, f\rangle = x(0)$, no se puede representar de forma

$$\langle x, f\rangle = \int_{-1}^{1} x(t)\, g(t)\, dt,$$

donde $g(t) \in C[-1, 1]$. Hallar una función $g(t)$ de variación acotada sobre $[-1, 1]$ tal, que

$$\langle x, f\rangle = \int_{-1}^{1} x(t)\, dg(t).$$

12.15. Para $x(t) \in C[-1, 1]$ hagamos

$$\langle x, f\rangle = \frac{x(-1)+x(1)}{2} + \int_{-1}^{1} tx(t)\, dt,$$

a) Demostrar que f es una funcional lineal acotada.

b) Hallar una función $g(t)$ de variación acotada sobre $[-1, 1]$ tal, que

$$\langle x, f\rangle = \int_{-1}^{1} x(t)\, dg(t).$$

12.16. Sea $x_0(t) \in C[0, 1]$ fijado. En el espacio $C[0, 1]$ consideremos el subespacio unidimensional $L = \{\lambda x(t)\}$ donde $\lambda \in R$. Definamos sobre L una funcional lineal f mediante la igualdad $\langle x, f\rangle = \lambda$ si $x = \lambda x_0$.

a) Demostrar que $\|f\| = 1$.

b) Según el teorema 12.1, f se puede prolongar sobre todo el espacio $C[0, 1]$ conservando la norma. ¿Es unívoca esta prolongación si: 1) $x_0(t) = t$; 2) $x_0(t) = 1 - 2t$?

12.17. En el espacio E^2 con elementos $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ está dada una funcional lineal $\langle x, f\rangle = x_1$ sobre el subespacio $L = \{x \in E^2: 2x_1 - x_2 = 0\}$. Demostrar que existe la única prolongación de f sobre todo el E^2 que conserva la norma y hallar esa prolongación.

12.18. Sean, H un espacio de Hilbert, $L \subset H$ un subespacio, f una funcional lineal acotada, dada sobre L. Demostrar que existe una única prolongación de f sobre todo el H, conservando la norma.

12.19. Demostrar que toda funcional lineal acotada no nula, dada sobre todo el espacio de Hilbert H, alcanza su norma sobre una bola unitaria cerrada de H y sólo en un punto de esta bola.

12.20. Sea f una funcional lineal acotada, dada sobre el subespacio $c_0 \subset m$. Demostrar que existe una única prolongación de f sobre todo el m, conservando la norma.

12.21. Demostrar que para $p > 1$ $(l_p)^* = l_q$, $1/p + 1/q = 1$, es decir, toda funcional lineal continua en el espacio l_p para $p > 1$ tiene la forma

$$\langle x, f\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n,$$

donde $x = (x_1, x_2, \ldots) \in l_p$, $y = (y_1, y_2, \ldots) \in l_q$, $1/p + 1/q = 1$ y $\|f\| = \|y\|_{l_q}$.

12.22. Demostrar que $(c_0)^* = l_1$, es decir, en el espacio c_0 toda funcional lineal tiene la forma

$$\langle x, f\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n,$$

dondo $x = (x_1, x_2, \ldots) \in c_0$, $y = (y_1, y_2, \ldots) \in l_1$ y $\| f \| = \| y \|_{l_1}$.

12.23. Emplear el problema 12.13 y demostrar que $(m)^* \neq l_1$.

12.24. Demostrar que $(l_1)^* = m$, es decir, en el espacio l_1 toda funcional lineal continua tiene la forma

$$\langle x, f \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n,$$

donde $x = (x_1, x_2, \ldots) \in l_1$, $y = (y_1, y_2, \ldots) \in m$ y $\| f \| = \| y \|_m$.

12.25. En el espacio $H^1 [-1, 1]$ hacemos

$$\langle x, f \rangle = \int_{-1}^{1} [x(t) \operatorname{sen} t + x'(t) \cos t] \, dt.$$

Demostrar quo f es una funcional lineal continua y hallar su norma.

12.26. La igualdad

$$\langle x, f \rangle = \int_{-1}^{1} [x(t) \cos t + x'(t) \operatorname{sen} t] \, dt$$

¿da una funcional lineal continua en el espacio $H^1 [-1, 1]$? Si la da, ¿qué función $y(t) \in H^1 [-1, 1]$ satisface la condición $\langle x, f \rangle = (x, y)$?

§ 13. Convergencia débil. Propiedad reflexiva

Sea X un espacio normado lineal. Una sucesión $x_n \in X$ $(n \in \mathbf{N})$ se llama *débilmente convergente* hacia el elemento $x \in X$ y se denota $x_n \to x$ $(n \to \infty)$ débilmente si $\langle x_n, f \rangle \to \langle x, f \rangle$ para cualquier $f \in X^*$. Una sucesión $f_n \in X^*$ $(n \in \mathbf{N})$ se denomina **-débilmente convergente* hacia el elemento $f \in X$ y se denota $f_n \to f$ $(n \to \infty)$ *-débilmente si $\langle x, f_n \rangle \to \langle x, f \rangle$ para cualquier $x \in X$.

TEOREMA 13.1. *Para que $x_n \to x$ $(n \to \infty)$ débilmente es necesario y suficiente que la sucesión $\| x_n \|$ sea acotada y $\langle x_n, f \rangle \to \langle x, f \rangle$ para cualquier f de una variedad lineal siempre densa en X^*.*

TEOREMA 13.2.. *Para que $f_n \to f$ $(n \to \infty)$ *-débilmente es necesario y suficiente que la sucesión $\| f_n \|$ sea acotada y $\langle x, f_n \rangle \to \langle x, f \rangle$ para cualquier x de una variedad lineal siempre densa en X.*

TEOREMA 13.3.. *Sea X un espacio de Banach. Para cada $x \in X$ fijado, la igualdad $\langle f \; F_x \rangle = \langle x, f \rangle$ define una funcional lineal acotada F_x sobre el espacio X^* con tal que $\| F_x \| = \| x \|$.*

Por lo tanto, tiene lugar el encaje isométrico $x \subset X^{**}$. Si además, $X = X^{**}$, entonces el espacio X se llama *reflexivo*.

Una sucesión x_n perteneciente a un espacio de Banach X se llama *débilmente acotada* si para cualquier $f \in X^*$ el conjunto $\langle x_n, f \rangle$ es acotado, y *débilmente fundamental* si para cualquier $f \in X^*$ la sucesión $\langle x_n, f \rangle$ es fundamental.

TEOREMA 13.4. *Todo conjunto débilmente acotado en el espacio de Banach es acotado.*

TEOREMA 13.5. *Si $x_n \to x$ $(n \to \infty)$ débilmente en un espacio de Banach X, entonces existe una sucesión de combinaciones lineales convexos de puntos x_k.*

$$\tilde{x}_n = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{nk} x_k, \quad \sum_{k=1}^{n} \alpha_{nk} = 1, \; \alpha_{nk} \geqslant 0$$

tal que $\tilde{x}_n \to x$ $(n \to \infty)$.

13.1. Sean: X, un espacio de Banach; x_n, $x \in X$; f_n, $f \in X^*$ $(n \in \mathbf{N})$ y;

1) $x_n \to x$, $f_n \to f$ cuando $n \to \infty$;

2) $x_n \to x$ cuando $n \to \infty$ débilmente, $f_n \to f$ cuando $n \to \infty$;

3) $x_n \to x$ cuando $n \to \infty$, $f_n \to f$ cuando $n \to \infty$ *-débilmente. Demostrar que $\langle x_n, f_n \rangle \to \langle x, f \rangle$ para $n \to \infty$.

13.2. Sean: X, un espacio normado lineal; f_n, $f \in X^*$ $(n \in \mathbf{N})$ y $f_n \to f$ $(n \to \infty)$. Demostrar que $f_n \to f$ $(n \to \infty)$ *-débilmente.

13.3. Sean H un espacio de Hilbert; x_n; x; y_n, $y \in H$ $(n \in \mathbf{N})$. ¿Qué se puede afirmar sobre la convergencia de la sucesión (x_n, y_n) si:

a) $x_n \to x$ $(n \to \infty)$ débilmente, $y_n \to y$;

b) $x_n \to x$ $(n \to \infty)$ débilmente, $y_n \to y$ $(n \to \infty)$ débilmente?

13.4. Sean: H, un espacio de Hilbert; x_n, $x \in H$ $(n \in \mathbf{N})$, $x_n \to x$ $(n \to \infty)$ débilmente y $\| x_n \| \to \| x \|$. Demostrar que $x_n \to x$ $(n \to \infty)$.

13.5. Sean: X, un espacio normado lineal; $x_n \in X$ $(n \in \mathbf{N})$. Demostrar que la sucesión x_n converge en X si, y sólo si, x_n converge débil y uniformemente en la bola $\{f \in X^* : \| f \| \leqslant 1\}$.

13.6. Sean: H, un espacio de Hilbert; $x_n \in H$ $(n \in \mathbf{N})$ un sistema ortogonal de elementos. Demostrar que las siguientes afirmaciones son equivalentes:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ converge;

b) $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ converge débilmente;

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \| x_n \|^2$ converge.

13.7. Sean: X, un espacio normado lineal; f_n, $f_0 \in X^*$ $(n \in \mathbf{N})$, $f_n \to f_0$ $(n \to \infty)$*-débilmente. ¿Es válido que $f_0 \in \overline{L}$, donde L es la cápsula lineal de la sucesión f_n?

13.8. En el espacio l_2 para $x = (x_1, x_2, \ldots) \in l_2$ pongamos $\langle x, f_n \rangle = x_n$. Demostrar que $f_n \to 0$ $(n \to \infty)$ *-débilmente. ¿Es cierto que $f_n \to 0$?

13.9. Para $x(t) \in L_2[-1, 1]$ pongamos

$$\langle x, f_n \rangle = \int_{-1}^{1} x(t) \cos n\pi t \, dt.$$

a) Demostrar que f_n es una funcional lineal acotada y hallar $\| f_n \|$.

b) Demostrar que $f_n \to 0$ $(n \to \infty)$ *-débilmente.

c) ¿Es válido que $f_n \to 0$ $(n \to \infty)$?

13.10. Para $x(t) \in C^1[-1, 1]$ tomemos

$$\langle x, f_\varepsilon \rangle = \frac{1}{2\varepsilon} x(\varepsilon) - x(-\varepsilon), \quad \langle x, f_0 \rangle = x'(0),$$

donde $\varepsilon \in \mathbf{R}$, $|\varepsilon| < 1$.

a) Demostrar que f_ε y f_0 son funcionales lineales continuas y hallar $\| f_\varepsilon \|$, $\| f_0 \|$.

b) Demostrar que $f_\varepsilon \to f_0$ $(\varepsilon \to 0)$ *-débilmente.

c) ¿Es cierto que $f_\varepsilon \to f_0$ $(\varepsilon \to 0)$?

13.11. Sean $x^{(n)}$, $x \in l_2$, $x^{(n)} = (x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \ldots)$, $x = (x_1, x_2, \ldots)$. Demostrar que $x^{(n)} \to x$ $(n \to \infty)$ débilmente si, y sólo si, $\sup_n \| x^{(n)} \| < \infty$ y $x_k^{(n)} \to x_k$ cuando $n \to \infty$ $(k \in \mathbf{N})$.

13.12. En el espacio $C[0, 1]$ dar un ejemplo de una sucesión débilmente convergente que no converja según la norma del espacio $C[0, 1]$.

13.13. Demostrar que en el espacio l_1 la convergencia débil coincide con la convergencia según la norma.

13.14. Sean: X, Y, espacios de Banach; $A_n \in \mathcal{L}(X, Y)$, y sea la sucesión $\langle A_n x, f\rangle$ acotada para cualquier $x \in X$ y cualquier $f \in Y^*$. Demostrar que la sucesión $\| A_n \|$ es acotada.

13.15. Sean: X, un espacio de Banach reflexivo; $M \subset X$, un subespacio; $M^\perp = \{f \in X^*: \langle x, f\rangle = 0$ para cualquier $x \in M\}$. Demostrar que $(M^\perp)^\perp = M$.

13.16. Sea X un espacio de Banach reflexivo, $f \in X^*$. Demostrar que existe $x \in X$, $x \neq 0$ tal, que $\langle x, f\rangle = \| x \| \| f \|$.

13.17. Empleando los problemas 11.9, 11.10, 13.16 demostrar que los espacios $C[0, 1]$, l_1, c_0 son no reflexivos.

13.18. Demostrar que un conjunto en un espacio de Banach es débilmente acotado si, y sólo si, es acotado.

13.19. Demostrar que en un espacio de Banach toda sucesión débilmente fundamental es acotada.

13.20. Demostrar que en un espacio de Banach toda sucesión débilmente convergente es débilmente fundamental.

13.21. Denominaremos *débilmente cerrado* a un conjunto M en un espacio de Banach X, si de $x_n \in M$, $x_n \to x$ $(n \to \infty)$ débilmente, se deduce que $x \in M$.

a) Demostrar que todo conjunto débilmente cerrado es cerrado.

Dar un ejemplo de un conjunto cerrado en un espacio de Banach que no sea débilmente cerrado.

13.22. Demostrar que todo subespacio de un espacio de Banach es débilmente cerrado.

13.23. Demostrar que todo conjunto cerrado convexo en un espacio de Banach es débilmente cerrado.

13.24. ¿Será débilmente completo el espacio $C[0, 1]$?

13.25. Sea X un espacio normado lineal separable. Demostrar que en el espacio X^* existe un conjunto numerable siempre denso en el sentido de la convergencia $*$-débil.

13.26. Sea X un espacio normado lineal. ¿Es válido que para todo subespacio $L \subset X^*$ existe un subespacio $M \subset X$ tal que $L = M^\perp$ (la ortogonalidad se comprende en el sentido del problema 12.10)?

§ 14. Operadores conjugados

Sean: X, Y, espacios normados lineales; $A: X \to Y$ un operador lineal con campo de definición $D(A)$, denso en X, posiblemente no acotado. Introduzcamos un conjunto

$D^* \subset Y^*$ de tales $f \in Y^*$, para las cuales tiene lugar la igualdad $\langle Ax, f\rangle = \langle x, \varphi\rangle$ para $\varphi \in X^*$. El operador $A^*f = \varphi$ con campo de definición $D(A^*) = D^* \subset Y^*$ y valores en X^* se llama *conjugado* al operador A. Por lo tanto, $\langle Ax, f\rangle = \langle x, A^*f\rangle$ para cualquier x de $D(A)$ y cualquier f de $D(A^*)$.

TEOREMA 14.1. *A^* es un operador lineal cerrado.*

TEOREMA 14.2. *La igualdad $D(A^*) = Y^*$ tiene lugar si, y sólo si, A es acotado sobre $D(A)$. En este caso $A^* \in \mathcal{L}(Y^*, X^*)$, $\| A^* \| = \| A \|$.*

Del teorema 14.2 se desprende que para $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ y $A^* \in \mathcal{L}(Y^*, X^*)$ $\| A^* \| = \| A \|$.

14.1. Sean: X e Y, espacios normados lineales; $\alpha, \beta \in \mathbf{C}$, $A, B \in \mathcal{L}(X, Y)$. Demostrar que $(\alpha A + \beta B)^* = \bar{\alpha}A^* + \bar{\beta}B$ (la raya significa la conjugación compleja).

14.2. Sea X un espacio normado lineal, $A, B \in \mathcal{L}(X)$. Demostrar que $(AB)^* = B^*A^*$.

14.3. Sea $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ y continuamente invertible. Demostrar que A^* es continuamente invertible y $(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$.

14.4. Sean X, Y espacios lineales normados. Demostrar que la aplicación $\Phi: \mathcal{L}(X, Y) \to \mathcal{L}(Y^*, X^*)$, $\Phi(A) = A^*$ es continua.

14.5. Sean X un espacio de Banach reflexivo, Y un espacio normado lineal, $A \in \mathcal{L}(X, Y)$. Demostrar que $(A^*)^*X \subset Y$ y $(A^*)^* = A$ como un operador de X en Y.

14.6. Sea H un espacio de Hilbert, $A \in \mathcal{L}(H)$. Demostrar que:

a) $N(AA^*) = N(A^*)$;

b) $N(A^*A) = N(A)$;

c) $R(AA^*) = R(A)$;

d) $\| AA^* \| = \| A \|^2$.

14.7. Sea H un espacio de Hilbert, $A \in \mathcal{L}(H)$. Demostrar que:

a) $(R(A))^\perp = N(A^*)$;

b) $(R(A^*))^\perp = \overline{N(A)}$;

c) $(N(A))^\perp = \overline{R(A^*)}$;

d) $(N(A^*))^\perp = \overline{R(A)}$.

14.8. Sea X un espacio de Banach, $A \in \mathcal{L}(X)$. Demostrar que $(R(A))^\perp = N(A^*)$ (la ortogonalidad se comprende en el sentido del problema 12.10).

14.9. Hallar el operador conjugado al operador A: $L_2[0, 1] \to L_2[0, 1]$ si:

a) $Ax(t) = \int_0^t x(\tau)\, d\tau$;

b) $Ax(t) = tx(t)$;

c) $Ax(t) = \int_0^1 tx(s)\, ds$;

d) $Ax(t) = \int_0^1 tx(t)\, dt$.

14.10. Hallar el operador conjugado al operador A: $l_1 \to l_1$ si:

a) $Ax = (x_1, x_2, \ldots, x_n, 0, 0, \ldots)$;

b) $Ax = (\lambda_1 x_1, \lambda_2 x_2, \ldots)$, donde $\lambda_n \in \mathbf{R}$, $|\lambda_n| \leqslant 1$, $n \in \mathbf{N}$;

c) $Ax = (0, x_1, x_2, \ldots)$;

d) $Ax = (x_2, x_3, \ldots)$.

14.11. Hallar los operadores conjugados a los operadores del problema 14.10 si se consideran como actuantes:

a) de c_0 en c_0;

b) de l_2 en l_2;

c) de l_1 en c_0.

14.12. En el espacio l_2 para $x = (x_1, x_2, \ldots) \in l_2$ hacemos $A_n x = (x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots)$.

a) Demostrar que $A_n \in \mathcal{L}(l_2)$ y $A_n \to 0$ $(n \to \infty)$ fuertemente.

b) Hallar A_n^* y averiguar si es cierto que $A_n^* \to 0$ $(n \to \infty)$ fuertemente.

14.13. Hallar el operador conjugado al operador de la inclusión (encaje) J: $l_2 \to c_0$, $Jx = x$.

14.14. Sea H un espacio de Hilbert y sean $y, z \in H$, $y \neq 0$, $z \neq 0$ elementos fijados arbitrarios. Para $x \in H$ hacemos $Ax = (x, y)\, z$. Demostrar que $A \in \mathcal{L}(H)$ y hallar el operador A^*.

14.15. Sea H un espacio de Hilbert y sean A, B: $H \to H$ operadores lineales definidos sobre todo el H y tales, que para cualesquiera $x, y \in H$ se cumple la igualdad $(Ax, y) = (x, By)$. Demostrar que A es un operador acotado y $B = A^*$.

14.16. Sean X, Y espacios normados lineales, $A: X \to Y$ un operador lineal, tal que $\overline{D(A)} = X$, el operador A^{-1} existe y pertenece a $\mathcal{L}(Y, X)$. Demostrar que $(A^*)^{-1}$ existe y pertenece a $\mathcal{L}(X^*, Y^*)$ con tal que $(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$.

14.17. En el espacio l_2 consideremos, para $x = (x_1, x_2, \ldots,) \in l_2$, el operador $A: l_2 \to l_2$, $Ax = (x_1, 2x_2, 3x_3, \ldots)$ con campo de definición $D(A) = \{x \in l_2,\ x = (x_1, x_2, \ldots): \sum_{n=1}^{\infty} n^2 |x_n|^2 < \infty\}$:

a) Demostrar que $\overline{D(A)} = l_2$.

b) Demostrar que A es un operador lineal no acotado sobre $D(A)$.

c) Hallar $D(A^*)$ y A^*.

14.18. Consideremos el operador: $A: l_2 \to l_1$, $Ax = x$ con campo de deifnición $D(A)$ que se compone de elementos $x = (x_1, x_2, \ldots) \in l_2$ para los cuales $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n| < \infty$

a) Demostrar que $\overline{D(A)} = l_2$.

b) Demostrar que A es un operador lineal no acotado sobre $D(A)$.

c) Hallar $D(A^*)$ y A^*.

14.19. Consideremos el operador $A: L_2[0, 1] \to L_2[0, 1]$, $Ax(t) = x(t^2)$ con campo de definición

$$D(A) = \left\{x(t) \in L_2[0,\ 1]: \int_0^1 x^3(t^2)\, dt < \infty\right\}.$$

a) Demostrar que $\overline{D(A)} = L_2[0, 1]$.

b) Demostrar que A es el operador lineal no acotado sobre $D(A)$.

c) Hallar $D(A^*)$ y A^*.

14.20. Consideremos el operador $A: L_2[0, 1] \to L_2[0, 1]$, $Ax(t) = dx/dt$ con campo de definición $D(A)$ que es una variedad lineal de funciones $x(t)$ continuamente diferenciables sobre $[0, 1]$ y que satisfacen las condiciones $x(0) = x(1) = 0$.

a) Demostrar que $\overline{D(A)} = L_2[0, 1]$.

b) Demostrar que A es el operador lineal no acotado sobre $D(A)$.

c) Hallar $D(A^*)$ y A^*.

14.21. Consideremos el operador $A: L_2[0, 1] \to L_2[0, 1]$, $Ax(t) = tx(0)$ con el campo de definición $D(A)$ que es una variedad lineal de funciones continuas sobre $[0, 1]$. Hallar $D(A^*)$ y A^*.

14.22. Hallar el operador conjugado al operador de la inclusión (encaje) $J: H^1[0, 1] \to L_2[0, 1]$, $Jx = x$.

14.23. Hallar el operador conjugado al operador A: $H^1[0, 1] \to L_2[0, 1]$, $Ax(t) = dx/dt$.

Capítulo 4

Conjuntos compactos y operadores totalmente continuos

§ 15. Conjuntos compactos en espacios normados

Un conjunto Q en un espacio de Banach X se denomina *bicompacto* si de toda sucesión $x_n \in Q$ $(n \in \mathbf{N})$ se puede escoger una subsucesión, cuyo límite pertenece a Q.

TEOREMA 15.1. Sea f: $Q \to \mathbf{R}$ *una función continua, definida sobre un conjunto bicompacto* $Q \subset X$. *Entonces* f *es acotada sobre* Q, *llega a sus cotas superior e inferior exactas sobre* Q *y es uniformemente continua sobre* Q.

Un sistema F_α de conjuntos abiertos de un espacio normado lineal X se denomina *cubrimiento* de un conjunto $A \subset X$ si todo punto $x \in A$ pertenece, por lo menos, a uno de F_α.

Un conjunto M de un espacio normado lineal X se denomina *compacto* si de toda sucesión $x_n \in M$ $(n \in \mathbf{N})$ se puede escoger una subsucesión fundamental. Un conjunto $M_\varepsilon \subset X$ se denomina ε-*red* de un conjunto $M \subset X$ si para cualquier $x \in M$ existe un $\hat{x} \subset M_\varepsilon$ tal, que $\| x - \hat{x} \| < \varepsilon$.

TEOREMA 15.2. *Un conjunto* M *en un espacio normado lineal* X *es compacto si, y sólo si, en* X *para cualquier* $\varepsilon > 0$ *existe una* ε-*red finita para* M.

Sea $\overline{G}$ un recinto acotado cerrado en el espacio E^n, $C(\overline{G})$ un espacio de funciones continuas sobre $\overline{G}$ con la norma $\| x \| = \max\limits_{t \in \overline{G}} | x(t) |$, $M \subset C(\overline{G})$ un conjunto de funciones. Este conjunto se llama *equiacotado* si existe un $c \in \mathbf{R}$ tal, que para cualquier $x \in M$ se cumple la desigualdad $\| x \| \leqslant c$; *equicontinuo* si para cualquier $\varepsilon > 0$ existe un $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tal, que para cualesquiera t_1, $t_2 \in \overline{G}$ que satisfacen la desigualdad $\| t_1 - t_2 \| < \delta$ se cumple la desigualdad $| x(t_1) - x(t_2) | < \varepsilon$ simultáneamente para todos los $x \in M$.

TEOREMA 15.3. *Para que un conjunto $M \subset C(\bar{G})$ sea compacto es necesario y suficiente que sea equiacotado y equicontinuo.*

Un conjunto M de elementos de un espacio normado lineal X se denomina localmente compacto si la intersección de M con toda bola cerrada en X es compacta.

TEOREMA 15.4. *Para que una variedad lineal L de un espacio normado lineal X sea localmente compacta es necesario y suficiente que L sea de dimensión finita.*

Un conjunto M de un espacio de Banach X se denomina débilmente compacto si de toda sucesión infinita de sus elementos se puede escoger una subsucesión débilmente fundamental.

TEOREMA 15.5. *Todo conjunto débilmente compacto es acotado en un espacio de Banach.*

TEOREMA 15.6. *Todo conjunto acotado de un espacio de Banach reflexivo es débilmente compacto.*

15.1. Sean X un espacio de Banach y $M \subset X$ tal conjunto cerrado que en X para cualquier $\varepsilon > 0$ existe una ε-red finita para M. Domostrar que M es bicompacto.

15.2. Demostrar que la adherencia de un conjunto compacto es bicompacto.

15.3. Demostrar que todo subconjunto de un conjunto bicompacto es compacto.

15.4. Sea un conjunto M en un espacio normado lineal X tal, que en X para cualquier $\varepsilon > 0$ existe una ε-red compacta para M. Demostrar que M es compacto.

15.5. Demostrar que en un espacio normado lineal de dimensión finita todo conjunto acotado es compacto.

15.6. Sean: M, un conjunto bicompacto en un espacio de Banach X; $x_n \in M$ $(n \in \mathbf{N})$; x_0 el único punto de acumulación de la sucesión x_n. Demostrar que $x_n \to x_0$ $(n \to \infty)$.

15.7. Demostrar que el conjunto $x_n = \operatorname{sen} nt \in L_2[-\pi, \pi]$ $(n \in \mathbf{N})$ es cerrado y acotado, pero no es compacto.

15.8. Sea M un conjunto bicompacto en un espacio de Banach X. Demostrar que para cualquier $\varepsilon > 0$ el conjunto M se puede representar en la forma

$$M = \bigcup_{i=1}^{n} F_i,$$

donde F_i son conjuntos cerrados y para $i = 1, 2, \ldots, n$, diam $F_i < \varepsilon$.

15.9. Demostrar que para que un conjunto M de un espacio de Banach X sea bicompacto, es necesario y suficiente que de todo cubrimiento de M se pueda extraer un subcubrimiento finito.

15.10. Sea A un conjunto bicompacto en un espacio de Banach X. Demostrar que para todo $x \in X$ existe tal $y \in A$ que $\rho(x, A) = \| x - y \|$.

15.11. Sean: A, un conjunto bicompacto; B, un conjunto cerrado en un espacio de Banach X, y $A \cap B = \varnothing$. Demostrar que $\rho(A, B) > 0$.

15.12. Sean A, B, conjuntos bicompactos en un espacio de Banach X. Demostrar que existen tales $x_0 \in A$ e $y_0 \in B$, que $\rho(A, B) = \| x_0 - y_0 \|$. ¿Necesariamente se tendrán tales puntos si A es bicompacto y B es cerrado?

15.13. Sea A un conjunto bicompacto en un espacio de Banach X. Demostrar que existen tales $x_0, y_0 \in A$, que $\operatorname{diam} A = \| x_0 - y_0 \|$.

15.14. Demostrar que un conjunto bicompacto no se puede aplicar isométricamente en alguna de sus partes.

15.15. En el espacio E^2 construir un conjunto compacto isométrico a alguna de sus partes.

15.16. Sean: X, un espacio de Banach; $M \subset X$, un conjunto bicompacto; Φ: $M \to M$ una aplicación tal, que para cualesquiera $x, y \in M$ se cumple la desigualdad $\| \Phi(x) - \Phi(y) \| \geqslant \| x - y \|$. Demostrar que Φ es la aplicación isométrica de M en sí.

15.17. Demostrar que en un espacio de Banach todo sistema de conjuntos bicompactos encajados no vacíos tiene intersección no vacía.

15.18. Sea M_n una sucesión de conjuntos bicompactos en un espacio de Banach X tal, que la intersección de cualquier número finito de estos conjuntos no es vacía. Demostrar que $\bigcap_{n=1}^{\infty} M_n$ no es vacía.

15.19. Sea U_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ un cubrimiento finito de un conjunto bicompacto M en un espacio de Banach X. Pongamos

$$\varphi_i(x) = \rho(x, M \setminus U_i), \quad e_i(x) = \varphi_i(x) \left(\sum_{i=1}^{n} \varphi_i(x) \right)^{-1}$$

$$i = 1, 2, \ldots, n.$$

Demostrar que el sistema de funciones $\{e_i(x)\}$, llamada *partición de la unidad* que corresponde al cubrimiento U_i, posee

las propiedades siguientes:

a) $0 \leqslant e_i(x) \leqslant 1$;

b) $e_i(x) = 0$ para $x \notin U_i$;

c) $\sum_{i=1}^{n} e_i(x) = 1$ para cualquier $x \in M$;

d) $e_i(x)$ son funciones continuas sobre M.

15.20. Sean: X, un espacio de Banach; A; $B \subset X$ y:

a) sean A, B bicompactos; demostrar que el conjunto $A + B$ es bicompacto;

b) sean A bicompacto y B cerrado; demostrar que el conjunto $A + B$ es cerrado;

c) sean A, B compactos; demostrar que el conjunto $A + B$ es compacto;

d) sean A, B cerrados; ¿es válido que $A + B$ es un conjunto cerrado?

15.21. Sean: M, un conjunto bicompacto en un espacio de Banach X; $C(M)$, un espacio de funciones reales, continuas sobre M, con la norma $\| x \| = \max_{t \in M} | x(t) |$. Demostrar que $C(M)$ es un espacio de Banach separable.

15.22. Sean: X, Y, espacios de Banach; $M \subset X$, un conjunto bicompacto; $C(M, Y)$, un conjunto de aplicaciones continuas definidas sobre M con campo de valores en Y. Demostrar que:

a) $C(M, Y)$ es un espacio lineal;

b) en $C(M, Y)$ se puede dar la norma por la igualdad $\| f \| = \sup_{x \in M} \| f(x) \|$;

c) en esta norma $C(M, Y)$ es un espacio de Banach.

15.23. En un espacio de Banach X, sea M tal conjunto, que para cualquier función f real y continua sobre M se cumple, por lo menos, una de las siguientes condiciones:

1) f es acotada sobre M;

2) si f es acotada sobre M, entonces f llega a sus cotas superior o inferior exactas sobre M.

Demostrar que M es bicompacto.

15.24. En un espacio de Banach X sea M tal conjunto, que cualquier función f real y continua sobre M es uniformemente continua. ¿Se deduce de aquí que M es bicompacto?

15.25. Demostrar que una aplicación continua transforma un conjunto bicompacto en otro bicompacto.

15.26. Sea f: $X \to Y$ una aplicación continua de un espacio de Banach X en un espacio de Banach Y, y sea $M \subset X$

un conjunto compacto. Demostrar que el conjunto $f(M) \subset Y$ es compacto.

15.27. ¿Es cierta la afirmación del problema anterior si la aplicación continua no está definida sobre todo el espacio X, sino sólo sobre el conjunto M?

15.28. Demostrar que si una función es uniformemente continua sobre un conjunto compacto M de un espacio normado lineal X, entonces es acotada sobre M.

15.29. Sea $M \subset C[a, b]$ un conjunto de funciones, sabiéndose que para cualquier $\varepsilon > 0$ y cualquier $t_0 \in [a, b]$ existe un $\delta = \delta(\varepsilon, t_0)$ tal, que si $|t - t_0| < \delta$, entonces para cualquier $x(t) \in M$ se cumple la desigualdad $|x(t) - x(t_0)| < \varepsilon$. ¿Será uniformemente continuo el conjunto M?

15.30. Sea $x_n(t) \in C[a, b]$ $(n \in \mathbf{N})$ un conjunto de funciones equicontinuo y sea que $x_n(t)$ converge hacia $x_0(t)$ puntualmente sobre $[a, b]$ para $n \to \infty$. Demostrar que $x_0(t) \in C[a, b]$.

15.31. Sea M un conjunto de funciones equiacotado en el espacio $C[a, b]$. Demostrar que el conjunto N de funciones tipo

$$y(t) = \int_0^t x(\tau)\, d\tau,$$

donde $x(t) \in M$, es compacto.

15.32. Demostrar que un conjunto equiacotado $M \subset C[a, b]$ de funciones, que satisfacen la condición de Lipschitz con la constante común, es bicompacto en el espacio $C[a, b]$.

15.33. Demostrar que un conjunto $M \subset C[a, b]$ de funciones, que son acotadas para un $t_0 \in [a, b]$ fijo y que satisfacen la condición de Lipschitz con la constante común, es bicompacto en el espacio $C[a, b]$.

15.34. Demostrar que un conjunto de funciones $x(t)$, continuamente diferenciables sobre $[a, b]$ y tales, que

$$|x(0)| \leqslant k_1, \quad \int_a^b |x'(t)|^2\, dt \leqslant k_2$$

(la constante $k_1 \geqslant 0$, la constante $k_2 > 0$), es compacto en el espacio $C[a, b]$.

15.35. Demostrar que un conjunto de funciones $x(t)$, continuamente diferenciables sobre $[a, b]$ y tales, que

$$\int_a^b [|x(t)|^2 + |x'(t)|^2]\, dt < k$$

con la constante $k > 0$, es compacto en el espacio $C[a, b]$.

15.36. Sea M un conjunto de funciones $x(t)$ continuamente diferenciables sobre $[a, b]$ y satisfacen las siguientes condiciones:

1) para cualquier $t \in [a, b]$ y cualquier $x(t) \in M$ se cumple la desigualdad $|x'(t)| < k$, siendo la constante $k > 0$;

2) para cualquier $x(t) \in M$, la ecuación $x(t) = 0$ tiene, por lo menos, una raíz sobre $[a, b]$. Demostrar que M es un conjunto compacto en el espacio $C[a, b]$.

15.37. En el espacio $C[a, b]$, ¿será bicompacto un conjunto equiacotado de polinomios de grado n?

15.38. Demostrar que un conjunto equiacotado de polinomios de grado $\leqslant n$ es bicompacto en el espacio $C[a, b]$.

15.39. Demostrar que para cualquier función $x(t)$, continua sobre $[a, b]$, existe un polinomio $P(t)$ de grado n que es un polinomio de la aproximación óptima, es decir,

$$\max_{t \in [a, b]} |x(t) - P(t)| \leqslant \max_{t \in [a, b]} |x(t) - Q(t)|$$

para cualquier polinomio $Q(t)$ de grado $\leqslant n$.

15.40. Sea $x(t)$ una función continua sobre $[a, b]$ y sea que existe una sucesión de polinomios de grado acotado que converge hacia $x(t)$ uniformemente sobre $[a, b]$. Demostrar que $x(t)$ es un polinomio.

15.41. Demostrar que la bola $\overline{S}_1(0)$ del espacio $C^1[a, b]$ es un conjunto compacto en el espacio $C[a, b]$. ¿Es esta bola un conjunto bicompacto en el espacio $C[a, b]$?

15.42. Demostrar que todo conjunto compacto en el espacio $C^1[a, b]$ es compacto también en el espacio $C[a, b]$.

15.43. Dar un ejemplo de un conjunto de funciones continuamente diferenciables sobre $[0, 1]$ que es compacto en el espacio $C[0, 1]$, pero no compacto en el espacio $C^1[0, 1]$.

15.44. En el espacio $C[0, 1]$, ¿son compactos los siguientes conjuntos de funciones

a) $x_n(t) = t^n$, $n \in \mathbf{N}$;

b) $x_n(t) = \operatorname{sen} nt$, $n \in \mathbf{N}$;

c) $x_n(t) = \operatorname{sen}(t + n)$, $n \in \mathbf{N}$;

d) $x_\alpha(t) = \operatorname{sen} \alpha t$, $\alpha \in \mathbf{R}$;

e) $x_\alpha(t) = \operatorname{sen} \alpha t$, $\alpha \in [1, 2]$;

f) $x_\alpha(t) = \operatorname{arctg} \alpha t$, $\alpha \in \mathbf{R}$;

j) $x_\alpha(t) = e^{t-\alpha}$, $\alpha \in \mathbf{R}$, 0?

15.45. En el espacio $C[0, 1]$, ¿será compacto un conjunto de funciones $x(t) \in C[0, 1]$ que para cualquier $t \in [0, 1]$

satisfacen la desigualdad $|x(t)| \leqslant \varphi(t)$, donde $\varphi(t) \in C[0, 1]$, $\varphi(t) \geqslant 0$ es una función fijada?

15.46. Demostrar que todo conjunto compacto no es denso en ningún lugar del espacio: a) $C[a, b]$; b) l_2.

15.47. Demostrar que para que un conjunto de funciones $M \subset C^k[a, b]$ sea compacto, es necesario y suficiente que sea equiacotado y el conjunto de derivadas de orden k de funciones que componen M sea equicontinuo.

15.48. Demostrar que un conjunto M de elementos $x = (x_1, x_2, \ldots)$ del espacio c o c_0 es compacto si, y sólo si, es acotado y $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ existe uniformemente respecto a $x \in M$, o sea, para cualquier $\varepsilon > 0$ se puede hallar tal $N = N(\varepsilon)$ que para todo $n > N$ para cualquier $x = (x_1, x_2, \ldots) \in M$ se cumple la desigualdad

$$|x_n - \lim_{n\to\infty} x_n| < \varepsilon.$$

15.49. Demostrar que un conjunto M de elementos $x = (x_1, x_2, \ldots) \in l_p$ $(p \geqslant 1)$ es compacto si, y sólo si, es acotado y

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} |x_k|^p$$

existe uniformemente respecto a $x \in M$, es decir, para cualquier $\varepsilon > 0$ existe tal $N = N(\varepsilon)$ que para todos $n > N$ y para cualquier $x = (x_1, x_2, \ldots) \in M$ se cumple la desigualdad

$$\sum_{k=n}^{\infty} |x_k|^p < \varepsilon.$$

15.50. Demostrar que el paralelepípedo $\{x \in l_2,\ x = (x_1, x_2, \ldots): |x_n| \leqslant 1/n\}$ es un conjunto bicompacto en el espacio l_2.

15.51. ¿Bajo qué condición para una sucesión $\lambda_n \in \mathbf{R}$, $\lambda_n > 0$ $(n \in \mathbf{N})$ es un conjunto bicompacto en el espacio l_2:

a) el paralelepípedo $\{x \in l_2,\ x = (x_1, x_2, \ldots): |x_n| \leqslant \lambda_n\}$;

b) el elipsoide $\left\{x \in l_2,\ x = (x_1, x_2, \ldots): \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x_n^2}{\lambda_n^2} \leqslant 1\right\}$?

15.52. Demostrar que si un subespacio del espacio $C[a, b]$ se compone de funciones continuamente diferenciables, él es de dimensión finita.

15.53. Sean: X, Y, espacios de Banach; $M \subset X$, un conjunto compacto; A_n, $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ $(n \in \mathbf{N})$ y $A_n \to A$ $(n \to \infty)$ fuertemente. Demostrar que $A_n x$ converge uniformemente hacia Ax para $n \to \infty$ y para todo $x \in M$.

15.54. Sea X un espacio de Banach, $x_n \in X$ $(n \in \mathbf{N})$, x_n compacta y $x_n \to x$ $(n \to \infty)$ débilmente. Demostrar que $x_n \to x$ $(n \to \infty)$.

15.55. Sea X un espacio de Banach reflexivo, $x_0 \in X$, $x_n \subset \overline{S}_r(x_0)$, $n \in \mathbf{N}$. Demostrar que existe una subsucesión x_{n_k} $(k \in \mathbf{N})$ tal, que $x_{n_k} \to x$ $(n \to \infty)$ débilmente, y $\overline{x} \in \overline{S}_r(x_0)$.

15.56. Demostrar que, en un espacio de Banach, todo conjunto compacto es débilmente compacto. Dar un ejemplo de un conjunto débilmente compacto que no sea compacto.

15.57. Demostrar que la bola cerrada unitaria del espacio $C[0, 1]$ no es un conjunto débilmente compacto.

§ 16. Operadores totalmente continuos lineales

Sean X, Y, espacios normados lineales. Un operador $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ se denomina *totalmente continuo* si transforma una bola unitaria cerrada del espacio X en un conjunto compacto del espacio Y. El conjunto de todos los operadores totalmente continuos de $\mathcal{L}(X, Y)$ se denota mediante $\sigma(X, Y)$.

TEOREMA 16.1. *Si* $A \in \sigma(X, Y)$, *entonces transforma cualquier conjunto acotado en* X *en un conjunto compacto en* Y.

TEOREMA 16.2. $\sigma(X, Y)$ *es un subespacio en el espacio* $\mathcal{L}(X, Y)$.

TEOREMA 16.3. *Sean* $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ *y* $B \in \mathcal{L}(Y, Z)$. *Si, por lo menos, uno de estos operadores es totalmente continuo, entonces su producto* BA *será un operador totalmente continuo.*

TEOREMA 16.4. *Sea* $A \in \sigma(X, Y)$. *Si* $x_n \in X$ $(n \in \mathbf{N})$ *y* $x_n \to x_0$ $(n \to \infty)$ débilmente, entonces $Ax_n \to Ax_0$.

TEOREMA 16.5. *Sea* $A \in \mathcal{L}(X, Y)$, *donde* Y *es un espacio de Banach. El operador* A *es totalmente continuo si, y sólo si,* A^* *es totalmente continuo.*

Sean: X, un espacio de Banach; $A \in \sigma(X, X) = \sigma(X)$; $x, y \in X$. La ecuación

$$Ax = y$$

se llama *ecuación de primera especie*, la ecuación

$$x - Ax = y \qquad (1)$$

se llama ecuación de *segunda especie*. A la par con la ecuación (1) consideremos la ecuación homogénea correspondiente

$$z - Az = 0, \tag{2}$$

así como la ecuación conjugada

$$f - A^* f = \omega \tag{3}$$

y una ecuación homogénea conjugada

$$\psi - A^* \psi = 0. \tag{4}$$

TEOREMA 16.6. *Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*
a) *la ecuación* (1) *tiene solución para cualquier segundo miembro y;*
b) *la ecuación* (2) *tiene solamente solución trivial;*
c) *la ecuación* (3) *tiene solución para cualquier segundo miembro;*
d) *la ecuación* (4) *tiene solamente solución trivial.*
Si se cumple una de las condiciones a), b), c), d), *entonces los operadores* $I - A$ *e* $I - A^*$ *son continuamente invertibles.*

TEOREMA 16.7. *Las ecuaciones* (2) *y* (4) *tienen números finitos iguales de soluciones linealmente independientes.*

TEOREMA 16.8. Para que la ecuación (1) tenga, por lo menos, una solución, es necesario y suficiente que para cualquier solución ψ de la ecuación (4) se cumpla la condición $\langle y, \psi \rangle = 0$.

TEOREMA 16.9. *Sean* X, Y *espacios normados lineales de dimensión infinita, con tal que* Y *es un espacio de Banach,* $A \in \sigma(X, Y)$ *y* $R(A)$ *es de dimensión infinita. Entonces* $R(A)$ *no es cerrado en* Y.

TEOREMA 16.10. *Sean* X, Y *espacios normados lineales, con tal que* X *es de dimensión infinita,* $A \in \sigma(X, Y)$ *y sobre* $R(A)$ *existe el operador inverso* A^{-1}. *Entonces* A^{-1} *es no acotado sobre* $R(A)$.

16.1. ¿Cuáles operadores $A: C[0, 1] \to C[0, 1]$ entre los siguientes son totalmente continuos:

a) $Ax(t) = tx(t)$;

b) $Ax(t) = \int_0^t x(\tau)\, d\tau$;

c) $Ax(t) = x(0) + tx(1)$;

d) $Ax(t) = \int_0^1 e^{ts} x(s)\, ds$;

e) $Ax(t) = x(t^2)$?

16.2. ¿Será totalmente continuo el operador A: $C[-1, 1] \to C[-1, 1]$, $Ax(t) = \frac{1}{2}[x(t) + x(-t)]$?

16.3. ¿Bajo qué condición para la función $\varphi(t) \in C[0, 1]$ será totalmente continuo el operador A: $C[0, 1] \to C[0, 1]$, $Ax(t) = \varphi(t)\, x(t)$?

16.4. El operador A: $C[0, 1] \to C[0, 1]$ se define por la igualdad

$$Ax(t) = \int_0^1 K(t, s)\, x(s)\, ds + \sum_{k=1}^{n} \varphi_k(t)\, x(t_k),$$

donde $K(t, s)$ es continua para $0 \leqslant s, t \leqslant 1$, $\varphi_k(t) \in C[0, 1]$, $t_k \in [0, 1]$ para $k = 1, 2, \ldots, n$. Demostrar que A es un operador totalmente continuo.

16.5. ¿Será totalmente continuo el operador $Ax(t) = dx/dt$ si se considera como actuante:

a) de $C^1[0, 1]$ en $C[0, 1]$;

b) de $C^2[0, 1]$ en $C^1[0, 1]$;

c) de $C^2[0, 1]$ en $C[0, 1]$?

16.6. Demostrar que el operador A: $L_2[a, b] \to L_2[a, b]$, $Ax(t) = \int_0^t x(\tau)\, d\tau$ es totalmente continuo.

16.7. Demostrar que el operador de proyección ortogonal en un espacio de Hilbert es totalmente continuo si, y sólo si, su imagen es de dimensión finita.

16.8. ¿Cuáles operadores entre los siguientes, definidos para $x = (x_1, x_2, \ldots) \in l_2$ con campo de valores en l_2, son totalmente continuos:

a) $Ax = (0, x_1, x_2, \ldots)$;

b) $Bx = \left(x_1, \frac{x_2}{2}, \frac{x_3}{3}, \ldots\right)$;

l) $Cx = \left(0, x_1, \frac{x_2}{2}, \frac{x_3}{3}, \ldots\right)$?

16.9. Demostrar que el operador de la inclusión (encaje).

a) J: $C^1[a, b] \to C[a, b]$, $Jx = x$;

b) J: $H^1[a, b] \to C[a, b]$, $Jx = x$ es totalmente continuo.

16.10. ¿Será totalmente continuo el operador de la inclusión J: $l_1 \to l_2$, $Jx = x$?

16.11. Demostrar que el operador A: $H^1[a, b] \to L_2[a, b]$, $Ax(t) = dx/dt$ es totalmente continuo.

16.12. En el espacio $L_2[0, 1]$ consideremos el operador $Ax(t) = d^2x/dt^2$ con campo de definición $D(A)$ que comprende funciones $x(t)$ que son dos veces continuamente diferenciables y satisfacen las condiciones de frontera $x(0) = x(1) = 0$. Demostrar que el operador A^{-1} existe, hallarlo y demostrar que es totalmente continuo.

16.13. Sea $X = Y$ un espacio entre los l_p, m, c, c_0. Para $x=(x_1, x_2, \ldots) \in X$ hacemos $y = Ax = (y_1, y_2, \ldots)$, donde $y_k = 0$ si k es impar, e $y_k = x_{k-1}$ si k es par. Demostrar que A no es totalmente continuo aunque $A^2 = 0$ sí lo es.

16.14. Sean X, Y, espacios de Banach; $A \in \sigma(X, Y)$, $B \in \mathcal{L}(X, Y)$ y $R(B) \subset R(A)$. Demostrar que $B \in \sigma(X, Y)$.

16.15. Sea X un espacio normado lineal. El operador $A \in \sigma(X)$, ¿puede ser una aplicación isométrica del espacio X en sí?

16.16. Sean: X, Y, espacios normados lineales; A: $X \to Y$, un operador lineal. ¿Es cierto que $A \in \sigma(X, Y)$ si:

a) X es de dimensión finita;

b) Y es de dimensión finita;

c) A es un operador acotado e Y de dimensión finita?

16.17. Sean: X, Y, espacios normados lineales; $A_n \in \sigma(X, Y)$ $(n \in \mathbf{N})$ y $A_n \to \infty$ $(n \to \infty)$ fuertemente. ¿Se desprende de aquí que $A \in \sigma(X, Y)$?

16.18. Demostrar que cualquier operador $A \in \mathcal{L}(H)$, siendo H un espacio de Hilbert, es el límite fuerte de una sucesión de operadores totalmente continuos.

16.19. Sea $A \in \sigma(l_2)$. Demostrar que existe una sucesión $A_n \in \mathcal{L}(l_2)$ $(n \in \mathbf{N})$, tal que $A_n \to A$ $(n \to \infty)$, y $R(A_n)$ es de dimensión finita para todos los n.

16.20. Sean e_n $(n \in \mathbf{N})$ una base ortonormalizada de un espacio de Hilbert H, $\lambda_n \in \mathbf{R}$ $(n \in \mathbf{N})$ y sea que $\lambda_n \to 0$ $(n \to \infty)$. Para $x \in H$ pongamos

$$Ax = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n (x, e_n) e_n.$$

Demostrar que el operador A está definido sobre todo el H, lo transforma en sí mismo y es totalmente continuo.

16.21. Sea $A \in \mathcal{L}(l_p)$ $(1 \leqslant p < \infty)$ y sea para $x = (x_1, x_2, \ldots) \in l_p$ $Ax = (\lambda_1 x_1, \lambda_2 x_2, \ldots)$ donde $\lambda_k \in \mathbf{R}$,

$\sup_h |\lambda_h| < \infty$. Demostrar que $A \in \sigma(l_p)$ si, $\lambda_k \to 0$ $(k \to \infty)$.

16.22. Sea e_n $(n \in \mathbb{N})$ una base ortonormalizada de un espacio de Hilbert H, y sean, Y un espacio de Banach, $A \in \mathscr{L}(H, Y)$ y sea que $\sum_{n=1}^{\infty} \| Ae_n \|^2$ converja. Demostrar que $A \in \sigma(H, Y)$.

16.23. Sean: H, un espacio de Hilbert; $A \in \mathscr{L}(H)$, $A^*A \in \sigma(H)$. Demostrar que $A \in \sigma(H)$.

16.24. Empleando el problema anterior demostrar que si $A \in \sigma(H)$, entonces $A^* \in \sigma(H)$.

16.25. Sean X, Y, espacios normados lineales, además X es de dimensión infinita; $A \in \sigma(X, Y)$. Demostrar que existe una sucesión $x_n \in X$ $(n \in \mathbb{N})$ tal, que $\| x_y \| = 1$ y $Ax_n \to 0$ $(n \to \infty)$.

16.26. Demostrar que el campo de valores de un operador totalmente continuo es separable.

16.27. Sea e_n $(n \in \mathbb{N})$ una base ortonormalizada de un espacio de Hilbert H y sea que $A \in \sigma(H)$. Demostrar que $Ae_n \to 0$ $(n \to \infty)$.

16.28. Sean H un espacio de Hilbert y $A \in \mathscr{S}(H)$. Demostrar que las siguientes afirmaciones son equivalentes:

a) si x_n, x, y_n, $y \in H$ $(n \in \mathbb{N})$ y $x_n \to x$ $(n \to \infty)$ débilmente, $y_n \to y$ $(n \to \infty)$ débilmente, entonces $(Ax_n, y_n) \to (Ax, y)$ $(n \to \infty)$;

b) si x_n, $x \in H$ $(n \in \mathbb{N})$, $x_n \to x$ $(n \to \infty)$ débilmente, entonces $Ax_n \to Ax$ $(n \to \infty)$;

c) $A \in \sigma(H)$.

16.29. Demostrar que para todo operador lineal A, que está dado en todo el espacio de Banach X y toma sus valores en un espacio de Banach Y, las siguientes propiedades son equivalentes:

a) A transforma toda sucesión convergente $x_n \in X$ en la sucesión convergente $Ax_n \in Y$;

b) A transforma toda sucesión débilmente convergente $x_n \in X$ en la sucesión débilmente convergente $Ax_n \in Y$;

c) A transforma toda sucesión convergente $x_n \in X$ en la sucesión débilmente convergente $Ax_n \in Y$.

16.30. Sean X, Y espacios de Banach, además X es reflexivo; $A \in \mathscr{L}(X, Y)$ y transforma toda sucesión débilmente convergente $x_n \in X$ en la sucesión convergente $Ax_n \in Y$. Demostrar que $A \in \sigma(X, Y)$.

16.31. Demostrar que todo operador lineal continuo $A \in \mathcal{L}(l_2, l_1)$ es totalmente continuo.

16.32. Sean: X, un espacio normado lineal; Y, un espacio de Banach separable; $A \in \mathcal{L}(X, Y)$. Demostrar que $A \in \sigma(X, Y)$ si, y sólo si, A^* transforma toda sucesión débilmente convergente en Y^* en una sucesión convergente en X^*.

16.33. Sean: H, un espacio de Hilbert; $A \in \sigma(H)$; $M \subset H$, un conjunto convexo acotado cerrado. Demostrar que:

a) la imagen del conjunto M es cerrada en H;

b) para cualquier $y \in H$ existe un $x_0 \in M$ tal, que $\inf_{x \in M} \| Ax - y \| = \| Ax_0 - y \|$. (Según [24], el elemento $x_0 \in H$ definido de este modo se denomina *casi solución* de la ecuación $Ax = y$, donde $x, y \in H$, $A \in \sigma(H)$).

16.34. Sean: H, un espacio de Hilbert; $A \in \sigma(H)$. Demostrar que la imagen de una bola cerrada unitaria es un conjunto bicompacto.

16.35. ¿Es cierta la afirmación del problema anterior para el operador $A \in \sigma(X)$ que se considera:

a) en un espacio de Banach arbitrario X;

b) en un espacio de Banach reflexivo X?

16.36. Sean: H, un espacio de Hilbert, y $A \in \sigma(H)$. Demostrar que existe tal $x \in H$, $x \neq 0$, que $\| Ax \| = \| A \| \times \| x \|$.

16.37. ¿Es cierta la afirmación del problema anterior para el operador $A \in \sigma(X)$ que se considera:

a) en un espacio de Banach arbitrario X;

b) en un espacio de Banach reflexivo X?

16.38. Sean: X, un espacio de Banach de dimensión infinita, y $A \in \sigma(X)$. Demostrar que existe un $y \in X$ tal, que la ecuación de primera especie $Ax = y$ no tiene solución.

16.39. Un operador totalmente continuo, ¿puede tener:

a) inverso acotado;

b) inverso derecho acotado;

c) inverso derecho?

16.40. El operador A: $C[0, 1] \to C[0, 1]$,

$$Ax(s) = \int_0^1 K(s, t)\, x(t)\, dt,$$

donde $K(s, t)$ es continua para $0 \leqslant s, t \leqslant 1$, ¿puede tener inverso acotado?

16.41. Sean: X, un espacio de Banach; $A \in \mathcal{L}(X)$, y sea que existe $c \in \mathbf{R}$ $c > 0$, tal que para cualquier $x \in X$ se cumple la desigualdad $\| Ax \| \geqslant c \| x \|$. ¿Puede ser totalmente continuo el operador A?

16.42. Sean: X, un espacio de Banach; $A \in \mathcal{L}(X)$, y sea que la ecuación $z - Az = 0$ no tiene más que solución trivial. ¿Se deduce de aquí que la ecuación $x - Ax = y$ tiene solución para cualquier $y \in X$?

16.43. Poner un ejemplo de un espacio de Banach X y un operador $A \in \mathcal{L}(X)$ tal que la ecuación $z - Az = 0$ tenga un número infinito de soluciones linealmente independientes.

16.44. Los teoremas 16.6—16.8 se refieren a la ecuación $Cx = y$, donde $C = I - A$, $A \in \sigma(X)$, X es un espacio de Banach. Demostrar que sus afirmaciones quedan en vigor si en el espacio de Banach X se considera la ecuación $Cx = y$, donde $C = B - A$, $B \in \mathcal{L}(X)$ y es continuamente invertible, $A \in \sigma(X)$.

16.45. Consideremos el operador A: $C[0, 1] \to C[0, 1]$,

$$Ax(t) = \int_0^t x(\tau)\, d\tau.$$

a) Demostrar que la ecuación $x - Ax = y$ tiene solución para cualquier $y \in C[0, 1]$.

b) Hallar el operador $(I - A)^{-1}$.

16.46. Sea A un operador lineal definido en todo el espacio normado lineal X con valores en X, $N_k = N(A^k)$, $R_k = R(A^k)$ $(k = 0, 1, \ldots)$. Demostrar que

a) $N_0 \subset N_1 \subset \ldots \subset N_k \subset N_{k+1} \subset \ldots$, y, al mismo tiempo, todos los N_k son distintos o existe tal número entero mínimo $n \geqslant 0$ que para $0 \leqslant r \leqslant n$ todos los N_r son distintos y todos los posteriores N_r coinciden con N_n (en este caso se dice que A tiene la *subida finita* n);

b) $R_0 \supset R_1 \supset \ldots \supset R_k \supset R_{k+1} \ldots$, y, al mismo tiempo, todos los R_k son distintos o existe tal número entero mínimo $m \geqslant 0$ que para $0 \leqslant r \leqslant m$ todos los R_r son distintos y todos los posteriores R_r coinciden con R_m (en este caso se dice que A tiene el *descenso finito* m).

16.47. Sea X un espacio de Banach, y sea que $A \in \mathcal{L}(X)$ y tiene la subida finita n y el descenso finito m. Demostrar que $n = m$ y $X = N_n \oplus R_n$.

16.48. Sea X un espacio de Banach; $A = I + B$, donde $B \in \sigma(X)$. Demostrar que:

a) A tiene la subida finita n y el descenso finito m y, por consiguiente, $n = m$ según el problema anterior;

b) todo subespacio N_r es de dimensión finita y toda variedad lineal R_r es cerrada;

c) A aplica R_n sobre R_n biunívoca y equicontinuamente.

16.49. Sea e_n $(n \in \mathbf{N})$ una base ortonormalizada en un espacio de Hilbert H. El operador $A \in \mathcal{L}(H)$ se denomina *operador de Hilbert—Schmidt* si la magnitud

$$\| A \|_2^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \| Ae_n \|^2$$

es finita. Demostrar que:

a) la magnitud $\| A \|_2$ no depende del modo de escoger la base ortonormalizada en H;

b) $\| A \|_2 = \| A^* \|_2$;

c) $\| A \| \leqslant \| A \|_2$;

d) la magnitud $\| A \|_2$ definida sobre la clase de operadores de Hilbert—Schmidt representa la norma;

e) en el espacio $\mathcal{L}(H)$ los operadores de Hilbert—Schmidt forman una variedad lineal;

f) la igualdad

$$(A, B) = \sum_{n=1}^{\infty} (Ae_n, Be_n)$$

define el producto escalar sobre la clase de operadores de Hilbert—Schmidt;

g) los operadores de Hilbert—Schmidt forman un espacio de Banach respecto a $\| A \|_2$;

h) todo operador de Hilbert—Schmidt es totalmente continuo;

i) el operador A: $L_2[0, 1] \to L_2[0, 1]$,

$$Ax(s) = \int_0^1 K(s, t)\, x(t)\, dt,$$

donde $K(s, t) \in L_2[0, 1] \times [0, 1]$, es operador de Hilbert—Schmidt;

j) si A es un operador de Hilbert—Schmidt y $B \in \mathcal{L}(H)$, entonces AB y BA son operadores de Hilbert Schmidt y, además $\| AB \|_2 \leqslant \| A \|_2 \| B \|$, $\| BA \|_2 \leqslant \| A \|_2 \| B \|$.

k) ¿Bajo qué condición para la sucesión $\lambda_n \in \mathbf{R}$ el operador A: $l_2 \to l_2$, $Ax = (\lambda_1 x_1, \lambda_2 x_2, \ldots)$ para $x = (x_1, x_2, \ldots) \in l_2$ será operador de Hilbert—Schmidt?

l) En el espacio l_2 construir un operador totalmente continuo que no sea operador de Hilbert—Schmidt.

16.50. Un operador $A \in \mathcal{L}(H)$ se llama *nuclear* si se le puede representar en la forma $A = BC$ donde B, C son operadores de Hilbert—Schmidt. Demostrar que si A es un operador nuclear, entonces:

a) A es un operador de Hilbert—Schmidt y, por consiguiente, operador totalmente continuo;

b) AD y DA, donde $D \in \mathcal{L}(H)$, son operadores nucleares;

c) A^* es un operador nuclear;

d) para cualquier base ortonormalizada e_n $(n \in \mathbf{N})$ en H, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} (Ae_n, e_n)$ converge absolutamente.

16.51. En el espacio l_2 dar un ejemplo de un operador nuclear y de un operador de Hilbert—Schmidt que no es nuclear.

§ 17. Operadores normalmente resolubles

Sean X, Y espacios de Banach, los dos reales o los dos complejos, y sean $A\colon X \to Y$ un operador lineal con $\overline{D(A)} = X$ y $A^*\colon Y^* \to X^*$ el operador conjugado a A.

El operador A se llama *normalmente resoluble* si para ser válida la resolubilidad de la ecuación $Ax = y$ es necesario y suficiente que $\langle y, \psi \rangle = 0$ para cualquier solución ψ de la ecuación $A^*\psi = 0$.

Un operador normalmente resoluble se denomina operador *noetheriano* si las variedades $N(A)$ y $N(A^*)$ son de dimensión finita. Con esto, el número $n = \dim N(A)$ se llama *número de ceros* del operador A, el número $m = \dim N(A^*)$ se denomina *número defectivo* del operador A y el número $\chi = n - m$ se llama *índice* del operador A.

El operador noetheriano de índice nulo se denomina *operador de Fredholm*.

17.1. Demostrar que si una ecuación $Ax = y$ tiene, por lo menos, una solución, entonces, $\langle y, \psi \rangle = 0$ para cualquier $\psi \in H(A^*)$.

17.2. Sea L una variedad lineal en un espacio Y^*. Introduzcamos el conjunto

$$^{\perp}L = \{y \in Y\colon \langle y, f \rangle = 0 \text{ para cualquier } f \in L\}.$$

Verificar que la afirmación del problema anterior es equivalente a la inclusión (encaje)

$$R(A) \subset {}^{\perp}N(A^*).$$

17.3. Demostrar que para las designaciones de los problemas 17.1 y 17.2 $\overline{R\bar{A}} \subset {}^{\perp}N(A^*)$.

17.4. Sea $y_0 \notin \overline{R(A)}$. Empleando el corolario 1 del teorema 12.1 demostrar que existe un $\psi_0 \in N(A^*)$ tal, que $\langle y_0, \psi_0 \rangle \neq 0$.

17.5. De los problemas 17.3 y 17.4 deducir que $\overline{R(A)} = {}^{\perp}N(A^*)$. Comparar con el problema 14.7.

17.6. Verificar que $\overline{R(A)} = Y$, es decir, la ecuación $Ax = y$ es resoluble para todos los y de una variedad lineal densa en Y si, y sólo si, el número defectivo del operador A es igual a cero.

17.7. Demostrar que para la resolubilidad normal del operador A es necesario y suficiente que se cumpla la igualdad $\overline{R(A)} = R(A)$, es decir, que el campo de valores del operador A sea cerrado.

17.8. Sea A normalmente resoluble y con el número defectivo nulo. Verificar que la ecuación $Ax = y$ tiene, por lo menos, una solución para cualquier $y \in Y$, es decir, $R(A) = Y$.

17.9. Sea que para un operador A su campo de valores $R(A)$ es de dimensión finita. ¿Se deduce de aquí que A es normalmente resoluble?

17.10. Demostrar que un operador $A \in \mathcal{L}(E^h, E^m)$ es noetheriano de índice $k - m$.

17.11. Demostrar que un operador $A \in \mathcal{L}(E^h, E^h)$ es de Fredholm.

17.12. Sean $A \in \mathcal{L}(E^h, E^m)$ y $B \in \mathcal{L}(E^n, E^h)$. Demostrar que $\chi(AB) = \chi(A) + \chi(B)$.

17.13. Demostrar que si un operador $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ es continuamente invertible, es también de Fredholm.

17.14. Consideremos un operador A: $l_2 \to l_2$ definido por la igualdad $Ax = (x_2, x_3, \ldots)$ para $x = (x_1, x_2, \ldots) \in l_2$.

a) Hallar el operador A^*.

b) Demostrar que los operadores A y A^* son noetherianos y hallar sus índices.

c) Demostrar que para $k \in \mathbf{N}$ los operadores A^k y $(A^*)^k$ son noetherianos y hallar sus índices.

17.15. Sea A un operador noetheriano. Verificar la validez de las afirmaciones siguientes (teoremas de Noether):

a) o bien la ecuación $Ax = y$ tiene, por lo menos, una solución para todo segundo miembro y, o bien la ecuación $A^*\psi = 0$ tiene solución no trivial;

b) cada una de las ecuaciones $Ax = 0$ y $A^*\psi = 0$ tiene un subespacio de soluciones de dimensión finita;

c) si la ecuación $A^*\psi = 0$ tiene solución no trivial, entonces la ecuación $Ax = y$ tiene, por lo menos, una solución para aquellos, y sólo aquellos, segundos miembros y que son ortogonales a cualquier solución de la ecuación $A^*\psi = 0$.

17.16. Sea A un operador de Fredholm. Verificar la validez de las afirmaciones siguientes (teoremas de Fredholm):

a) o bien la ecuación $Ax = y$ tiene solución única para cualquier segundo miembro y, o bien la ecuación $Ax = 0$ tiene soluciones no triviales;

b) las dos ecuaciones $Ax = 0$ y $A^*\psi = 0$, o bien sólo tienen soluciones triviales, o bien, las dos tienen igual número de soluciones linealmente independientes;

c) si el número de ceros del operador A es distinto de cero, la ecuación $Ax = y$ tiene soluciones para aquellas, y sólo aquellas, y que son ortogonales a cualesquiera soluciones de la ecuación $A^*\psi = 0$.

17.17. Sea un operador A totalmente continuo y sea su campo de valores $R(A)$ de dimensión infinita. ¿Será A normalmente resoluble?

17.18. Sea un operador $T \in \sigma(H)$ (es decir, totalmente continuo). Demostrar que el operador $A = I - T$ es de Fredholm.

17.19. ¿Será normalmente resoluble el operador A: $L_2[0, 1] \to L_2[0, 1]$

$$Ax(t) = \int_0^t x(s)\, ds?$$

17.20. Sea un operador A: $X \to Y$ cerrado y sea que existe $m > 0$, tal que para cualquier $x \in D(A)$ se cumple la desigualdad $\| Ax \| \geqslant m \| x \|$. Demostrar que A es normalmente resoluble.

17.21. Sea $\{\varphi_i\}_{i=1}^n$ un sistema de elementos, linealmente independiente, en el espacio de Banach X. Demostrar que en el espacio dual X^* existe un sistema de elementos $\{\gamma_j\}_{j=1}^n$ tal, que

$$\langle \varphi_i, \gamma_j \rangle = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ para } i = j, \\ 0 \text{ para } i \neq j, \end{cases} \quad (i, j = 1, 2, \ldots, n).$$

(Los sistemas $\{\varphi_i\}_{i=1}^n$ y $\{\gamma_j\}_{j=1}^n$ se llaman *biortogonales*). Demostrar que el sistema $\{\gamma_j\}_{j=1}^n$ es también linealmente independiente.

17.22. Sean los sistemas $\{\varphi_i\}_{i=1}^n \in X$, $\{\gamma_j\}_{j=1}^n \in X^*$ biortogonales. Consideremos el operador P: $X \to X$,

$$Px = \sum_{i=1}^{n} \langle x, \gamma_i \rangle \varphi_i$$

a) Demostrar que $P \in \mathcal{L}(X)$.

b) Empleando los problemas 8.35 y 8.36 demostrar que P representa el operador de proyección en X.

c) Verificar que el operador P engendra la partición del espacio X en suma directa de subespacios

$$X = X_n \oplus X_{\infty - n},$$

donde $X_n = R(P)$, $X_{\infty - n} = R(I - P)$.

17.23. Sea $\{\psi_i\}_{i=1}^n$ un sistema linealmente independiente en un espacio Y^* que es dual a un espacio de Banach Y. Introducimos en Y y en Y^* los subespacios:

$$\widetilde{Y} = \{y \in Y: \langle y, \psi_i \rangle = 0, \ i = 1, 2, \ldots, n\},$$

$$\widetilde{Y}^{\perp} = \{f \in Y^*: \langle y, f \rangle = 0 \text{ para cualquier } y \in \widetilde{Y}\}.$$

Demostrar que existe un número exacto n de elementos linealmente independientes $y_i \notin \widetilde{Y}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ y de elementos $f_i \in Y^*$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ tales, que los sistemas $\{y_i\}_{i=1}^n$ y $\{f_j\}_{j=1}^n$ son biortogonales.

17.24. Sea $\{\psi_j\}_{j=1}^n\}$ un sistema linealmente independiente en un espacio de Banach Y^*, dual a un espacio de Banach Y. Demostrar que:

a) en el espacio Y existe un sistema linealmente independiente de elementos $\{z_i\}_{i=1}^n$ tal, que los sistemas $\{\psi_j\}_{j=1}^n$ y $\{z_i\}_{i=1}^n$ son biortogonales;

b) el operador Q: $Y \to Y$ definido por la fórmula

$$Qy = \sum_{i=1}^{n} \langle y, \psi_i \rangle z_i$$

es acotado, representa el operador de proyección en Y y engendra la partición del espacio Y en suma directa de los subespacios $Y = Y^n \oplus Y^{\infty - n}$ donde $Y^n = R(Q)$, $Y^{\infty - n} = R(I - Q)$.

17.25. Sean los sistemas $\{\varphi_i\}_{i=1}^n \in X$, $\{\gamma_j\}_{j=1}^n \in X^*$, y también los sistemas $\{\psi_j\}_{j=1}^n \in Y^*$, $\{z_i\}_{i=1}^n \in Y$, biortogo-

nales. Formemos el operador de dimensión finita $K: X \to Y$,

$$Kx = \sum_{i=1}^{n} \langle x, \gamma_i \rangle z_i.$$

a) Demostrar que

$$K^* f = \sum_{i=1}^{n} \langle \overline{z_i, f} \rangle \gamma_i,$$

donde la raya significa conjugación compleja en el caso de espacios complejos X, Y.

b) Verificar que $K_{\varphi i} = z_i K^* \psi_i = \gamma_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$.

17.26. Sea un operador $A: X \to Y$ de Fredholm con el número de ceros $n > 0$. Sean $\{\varphi_i\}_{i=1}^{n} \in X$, $\{\psi_j\}_{j=1}^{n} \in Y^*$ bases en $N(A)$ y $N(A^*)$ respectivamente y $\{\gamma_j\}_{j=1}^{n} \in X^*$, $\{z_i\}_{i=1}^{n} \in Y$ sistemas biortogonales a éstas. Formemos el operador $\widetilde{A} = A + K$, donde el operador K fue definido en el problema anterior. Demostrar que los operadores $\widetilde{A}$ y $(\widetilde{A})^*$ tienen números de cero nulos.

17.27. Para las condiciones del problema anterior demostrar que $R(\widetilde{A}) = Y$.

17.28. Verificar que para las condiciones del problema 17.26 el operador $\widetilde{A}$ es continuamente invertible (esta afirmación se denomina lema de Schmidt).

17.29. Verificar que para las condiciones del problema 17.26:

a) son válidas las descomposiciones directas de los problemas 17.22 y 17.24, además, $X_n = N(A)$, $Y^{\infty - n} = R(A)$;

b) $\widetilde{A} = A$ sobre $D(A)$ y el operador A aplica $X_{\infty - n} \cap D(A)$ sobre $Y^{\infty - n}$ biunívocamente;

c) $\widetilde{A}$ aplica X_n sobre Y^n biunívocamente.

17.30. Demostrar que si un operador A es de Fredholm, se puede representarlo en la forma $A = B + P$, donde B es continuamente invertible y el campo de valores $R(P)$ es de dimensión finita.

17.31. Demostrar que si un operador A es de Fredholm, se puede representarlo en la forma $A = C + T$, donde C es continuamente invertible y T totalmente continuo.

17.32. Sean: un operador C, continuamente invertible, y un operador T, totalmente continuo. Demostrar que el operador $A = C + T$ es de Fredholm.

17.33. Verificar que para que un operador $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ sea de Fredholm es necesario y suficiente que se cumpla cada una de las condiciones siguientes:

a) se puede representar este operador en la forma $A = B + P$ donde $B \in \mathcal{L}(X, Y)$ y es continuamente invertible, $P \in \mathcal{L}(X, Y)$ y $R(P)$ es de dimensión finita;

b) se puede representar el operador en la forma $A = C + T$, donde $C \in \mathcal{L}(X, Y)$ y es continuamente invertible, $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ y es totalmente continuo.

17.34. Sea $A \in \mathcal{L}(X, Y)$, $R(A)$ cerrado, y sea que existe un sistema de elementos $\{y_i\}_{i=1}^{n} = Y$ tal, que se puede representar cualquier $y \in Y$ de modo único en la forma $y = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i y_i + z_i$, donde $\lambda_i \in \mathbf{R}$ y $z \in R(A)$. Demostrar que el número defectivo del operador A es igual a n.

17.35. Sean: H, un espacio de Hilbert complejo; $A \in \mathcal{L}(H)$, un operador noetheriano, e $y \in H$. Sea que existe un número $r > 0$ tal, que el operador B: $H \to H$, $Bx = r^2 A^* x - \overline{(x, y)}\, y$, es no negativo. Demostrar que:

a) la ecuación $Ax = y$ es resoluble, o sea, $y \in R(A)$;

b) la ecuación $AA^* f = y$ es resoluble;

c) el elemento $\hat{x} = A^* f$, donde f es solución de la ecuación $AA^* f = y$, no depende de f y es la solución menor, según la norma de la ecuación $Ax = y$;

d) si el número de ceros del operador A es distinto de cero, el sistema $Ax = y$, $\| x \| = r$ es resoluble.

Capítulo 5

Operadores autoconjugados. Teoría espectral

§ 18. Operadores autoconjugados

Sea H un espacio de Hilbert complejo. El operador $A \in \mathcal{L}(H)$ se denomina *autoconjugado* si $A^* = A$, es decir, para cualesquiera $x, y \in H$ se cumple la igualdad $(Ax, y) = (x, Ay)$. El conjunto de todos los operadores autoconjugados de $\mathcal{L}(H)$ se denota mediante $\delta(H)$.

TEOREMA 18.1. *Si* $A, B \in \delta(H)$, $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$, *entonces* $\alpha A + \beta B \in \delta(H)$.

TEOREMA 18.2. *Sean* $A, B \in \delta(H)$. *El operador* AB *es autoconjugado si, y sólo si,* $AB = BA$.

TEOREMA 18.3. *Si* $A \in \delta(H)$, $\| A \| = \sup_{\|x\| \leqslant 1} |(Ax, x)|$.

Un operador $A \in \delta(H)$ se llama *no negativo* y se designa por $A \geqslant 0$ si $(Ax, x) \geqslant 0$ para cualquier $x \in H$. Para los operadores $A, B \in \delta(H)$ la escritura $A \geqslant B$ o $B \leqslant A$ significa que $A - B \geqslant 0$.

TEOREMA 18.4. *Sea* P *un operador de proyección en un espacio de Hilbert* H *sobre un subespacio* M. *Entonces*:

a) $P \in \mathcal{L}(H)$ *además*, $\| P \| = 1$ *si* $M \neq 0$;

b) $P^2 = P$;

c) $P \in \delta(H)$;

d) $P \geqslant 0$;

e) $x \in M$ *si, y sólo si,* $\| Px \| = \| x \|$;

f) $(Px, x) \leqslant \| x \|^2$ *para cualquier* $x \in H$.

TEOREMA 18.5. *Sea* $A \in \delta(H)$, $A^2 = A$. *Entonces* A *es el proyector sobre un subespacio* $M \subset H$.

TEOREMA 18.6. *Cada operador no negativo* $A \in \delta(H)$ *tiene una raíz única, llamada cuadrada,* $\sqrt{A} \in \delta(H)$ *tal, que* $(\sqrt{A})^2 = A$ y $\sqrt{A} \geqslant 0$. *Además,* $\sqrt{A}$ *es conmutable con un operador* $C \in \mathcal{L}(H)$ *si, y sólo si,* C *es conmutable con* A.

Para $A \in \delta(H)$ introducimos las siguientes designaciones;

$|A| = \sqrt{A^2}$; $A^+ = \frac{1}{2}\{|A| + A\}$; $A^- = \frac{1}{2}\{|A| - A\}$, donde $\sqrt{A^2}$ es la raíz cuadrada no negativa del operador A^2.

18.1. Demostrar que $A: l_2 \to l_2$, $Ax = (\lambda_1 x_1, \lambda_2 x_2, \ldots)$ para $x = (x_1, x_2, \ldots) \in l_2$, donde $\lambda_k \in \mathbf{R}$ $(k \in \mathbf{N})$, $\sup\limits_k |\lambda_k| < \infty$, es un operador autoconjugado. ¿Bajo qué condición para la sucesión λ_k él será no negativo?

18.2. Demostrar que el operador A: $L_2[0, 1] \to L_2[0, 1]$, $Ax(t) = tx(t)$ es un operador autoconjugado no negativo.

18.3. Demostrar que el operador A: $L_2[0, 1] \to L_2[0, 1]$,

$$Ax(t) = \int_0^1 e^{s+t} x(s)\, ds$$

es autoconjugado no negativo.

18.4. Sea $h \in \mathbf{R}$ $h \neq 0$ fijado. Demostrar que el operador de diferencias A: $L_2(-\infty, \infty) \to L_2(-\infty, \infty)$,

$$Ax(t) = \frac{i}{h}\left[x\left(t + \frac{h}{2}\right) - x\left(t - \frac{h}{2}\right)\right]$$

es autoconjugado.

18.5. Sea A, $B \in \mathcal{L}(H)$, $A \in \delta(H)$. Demostrar que $B^*AB \in \delta(H)$.

18.6. Sea $A \in \delta(H)$. Demostrar que:

a) $\|A\| = \sup\limits_{\|x\|=1} |(Ax, x)|$;

b) $\|A\| = \sup\limits_{\|x\|=1,\ \|y\|=1} |(Ax, y)|$.

18.7. Sean H un espacio de Hilbert complejo, $A \in \mathcal{L}(H)$ y sea para cualquier $x \in H$ el número (Ax, x) real. Demostrar que $A \in \delta(H)$.

18.8. Sea $A \in \delta(H)$. ¿Será cerrado sobre la recta real un conjunto (Ax, x) si $x \in H$, $\|x\| = 1$?

18.9. Sea $A \in \mathcal{L}(H)$ y $(Ax, x) = 0$ para cualquier $x \in H$. Demostrar que $A = 0$. ¿Es válida esta afirmación para un operador lineal acotado que se considera en un espacio de Hilbert real?

18.10. Sean $A \in \delta(H)$, $x_n \in (H)$ $(n \in \mathbf{N})$, $x_n \to x$ $(n \to \infty)$. Demostrar que $(Ax_n, x_n) \to (Ax, x)$ $(n \to \infty)$. ¿Es sustancial que $A \in \delta(H)$?

18.11. ¿Es un subespacio en un espacio de Hilbert H el conjunto $N = \{x \in H: (Ax, x) = 0\}$ si:

a) $A \in \delta(H)$;

b) $A \in \delta(H)$, $A \geqslant 0$?

18.12. Sea $A \in \mathcal{L}(H)$. Demostrar que:

a) $\lambda(A + A^*) \in \delta(H)$ para cualquier $\lambda \in \mathbf{R}$;

b) se puede representar A en la forma $A = A_1 + iA_2$ donde $A_1, A_2 \in \delta(H)$.

18.13. ¿Puede ser no cerrado el campo de valores de un operador autoconjugado?

18.14. Sea $A \in \delta(H)$, $N(A) = 0$. Demostrar que $\overline{(R\,A)} = H$.

18.15. Sea $A \in \delta(H)$. Demostrar que $\| A^2 \| = \| A \|^2$.

18.16. Sea $A_n \in \delta(H)$ $(n \in \mathbf{N})$, y sea que para $n \to \infty$ converge fuertemente hacia el operador A. Demostrar que $A \in \delta(H)$.

18.17. Sea $A_n \in \delta(H)$ $(n \in \mathbf{N})$, $A_n \geqslant 0$ y sea que para $n \to \infty$ converge fuertemente hacia el operador A. Demostrar que $A \geqslant 0$.

18.18. Sea $A \in \delta(H)$. Demostrar que si para cierto $x \in H$ $Ax \neq 0$, entonces, $A^n x \neq 0$ para todo n natural.

18.19. Sea $A \in \delta(H)$.

a) Demostrar que para todo $x \in H$ y cualquier número natural $n > 1$, se cumple la desigualdad $\| A^n x \|^2 \leqslant \| A^{n-1} x \| \| A^{n+1} x \|$.

b) Sea $x \in H$, $x \notin N(A)$. Demostrar que la sucesión

$$\alpha_n = \frac{\| A^{n+1} x \|}{\| A^n x \|}, \quad n \in \mathbf{N}.$$

converge.

18.20. Sea $A \in \delta(H)$, $A \geqslant 0$. Demostrar que las siguientes afirmaciones son equivalentes:

a) $R(A)$ es siempre densa en H;

b) $N(A) = 0$;

c) $(Ax, x) > 0$ para todo $x \in H$, $x \neq 0$.

18.21. Sea $P \in \mathcal{L}(H)$, $P^2 = P$. Demostrar que las siguientes afirmaciones son equivalentes:

a) $P \in \delta(H)$;

b) $PP^* = P^*P$;

c) $R(P) = (N(P))^{\perp}$;

d) $(Px, x) = \| Px \|^2$ para todo $x \in H$.

18.22. Sea $A \in \mathcal{L}(H)$. Demostrar que AA^* y A^*A son operadores autoconjugados no negativos.

18.23. Sean $A, B \in \delta(H)$ y $A \geqslant 0$. Demostrar que $BAB \geqslant 0$.

18.24. Sean $A, B \in \delta(H)$, $A \geqslant B$, $C \in \mathcal{L}(H)$. Demostrar que C^*AC, $C^*BC \in \delta(H)$ y $C^*AC \geqslant C^*BC$.

18.25. Sean $A, B \in \delta(H)$ y sea que se cumplen las igualdades $A \geqslant B$ y $B \geqslant A$. Demostrar que $A = B$.

18.26. Para cualesquiera dos operadores $A, B \in \delta(H)$, ¿se puede afirmar que bien $A \geqslant B$, o $B \geqslant A$?

18.27. Sea $A \in \delta(H)$, $A \geqslant 0$. Demostrar que para todo $x \in H$ se cumple la desigualdad $\| Ax \|^2 \leqslant \| A \| (Ax, x)$.

18.28. Sea $A \in \delta(H)$, $0 \leqslant A \leqslant \lambda I$, donde $\lambda \in \mathbf{R}$. Demostrar que $\| A \| \leqslant \lambda$.

18.29. Sea $A \in \delta(H)$ y continuamente invertible. Demostrar que $A^{-1} \in \delta(H)$.

18.30. Sea $A \in \delta(H)$, $A \geqslant 0$ y A continuamonte invertible. Demostrar que $A^{-1} \geqslant 0$.

18.31. Sean $A \in \delta(H)$, $\lambda \in \mathbf{C}$, $\operatorname{Im} \lambda \neq 0$. Demostrar que el operador $(A - \lambda I)^{-1}$ existe.

18.32. Sea $A \in \mathcal{L}(H)$. Demostrar que el operator $(I + AA^*)^{-1}$ existe.

18.33. Sea $A \in \delta(H)$, $A \geqslant 0$. Demostrar que el operador $(I + A)^{-1}$ existe.

18.34. Sea $A \in \delta(H)$, $A \geqslant 0$. Demostrar que para cualquier $\lambda > 0$ el operador $A + \lambda I$ es continuamente invertible.

18.35. Demostrar que un operador $A \in \mathcal{L}(H)$ es continuamente invertible si, y sólo si, existen tales $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$, que $AA^* \geqslant \alpha I$, $A^*A \geqslant \beta I$.

18.36. Sean $A, B \in \delta(H)$, $0 < I \leqslant A \leqslant B$. Demostrar que A, B son continuamente invertibles y $B^{-1} \leqslant A^{-1}$.

18.37. Sean $A, B \in \delta(H)$, $A \geqslant 0$, $B \geqslant 0$ y $AB = BA$. Demostrar que $AB \geqslant 0$.

18.38. Sean $A, B, C \in \delta(H)$, $A \geqslant B$, $C \geqslant 0$, $AC = CA$, $BC = CB$. Demostrar que $AC \geqslant BC$.

18.39. Consideremos el operador A: $l_2 \to l_2$, $Ax = (0, 0, x_3, x_4, \ldots)$ para $x = (x_1, x_2, x_3, \ldots) \in l_2$. Demostrar que $A \in \delta(l_2)$, $A \geqslant 0$. Hallar $\sqrt{A}$.

18.40. Sea $A \in \delta(H)$, $A \geqslant 0$. Demostrar que $\| \sqrt{A} \| = \sqrt{\| A \|}$.

18.41. En el espacio E^2 un operador A transforma $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ en $Ax = \begin{pmatrix} 2x_1 + 3x_2 \\ 3x_1 + 5x_2 \end{pmatrix}$. Demostrar que $A \in \delta(E^2)$ y que $A \geqslant 0$. Hallar $\sqrt{A}$.

18.42. Sean $A, B, C \in \delta(H)$, $A \geqslant 0$, $B^2 = C^2 = A$. Demostrar que $BC = CB$.

18.43. Para los operadores de los problemas 18.1. y 18.2 hallar los operadores $|A|$, A^+, A^-.

18.44. Demostrar que para $A \in \delta(H)$:

a) $A^+A^- = A^-A^+ = 0$;

b) $|A| \geqslant 0$, $|A| = 0$, si, y sólo si $A = 0$;

c) $|A|^2 = A^2$;

d) si $A^- = 0$, entonces $A = A^+ = |A|$;

e) si $A^+ = 0$, entonces $A = -A^- = -|A|$.

18.45. Demostrar que para $A \in \delta(H)$ la norma del operador $|A|$ es igual a la norma del operador A.

18.46. Sea $A \in \delta(H)$, $A \geqslant 0$. Demostrar que $|A| = A$.

18.47. Sea e_n ($n \in \mathbf{N}$) una base ortonormalizada en H. Definimos el operador A: $H \to H$ mediante las igualdades $Ae_1 = 0$, $Ae_n = e_{n-1}/n$ para $n > 1$. Demostrar que:

a) $A \in \mathcal{L}(H)$ y es totalmente continuo;

b) no existe ningún operador $B \in \mathcal{L}(H)$ tal, que $B^2 = A$.

18.48. Sea $A \in \mathcal{L}(H)$. Demostrar que existe y es único un operador $B \in \delta(H)$ tal, que $B \geqslant 0$ y para todo $x \in H$ se cumple la igualdad $\|Ax\| = \|Bx\|$.

18.49. Sea A: $H \to H$ un operador lineal con $D(A) = H$ y, además, tal, que para cualesquiera x, $y \in H$ se cumple la igualdad $(Ax, y) = (x, Ay)$. Demostrar que A es acotado y, por consiguiente, $A \in \delta(H)$.

18.50. Sea $A \in \mathcal{L}(H)$, $AA^* = A^*A$ (un operador que es conmutable con su conjugado se llama *normal*). Demostrar que:

a) $\|Ax\| = \|A^*x\|$ para todo $x \in H$;

b) $N(A) = N(A^*) = (R(A))^{\perp}$;

c) $\|A^2\| = \|A\|^2$;

d) si $A^2 = A$, entonces $A \in \delta(H)$;

e) si $A^2 = 0$, entonces $A = 0$.

18.51. Sea $A \in \mathcal{L}(H)$ un operador normal con tal que $A^{-1} \in \mathcal{L}(H)$. Demostrar que A^{-1} es un operador normal.

18.52. Sean $A \in \mathcal{L}(H)$, $\alpha, \beta \in \mathbf{C}$, $|\alpha| = |\beta| = 1$. Demostrar que el operador $\alpha A + \beta A^*$ es normal.

18.53. Sean A_n, $A \in \mathcal{L}(H)$ operadores normales ($n \in \mathbf{N}$) y $A_n \to A$ para $n \to \infty$ fuertemente. Demostrar que $A_n^* \to A^*$ para $n \to \infty$ fuertemente.

18.54. Sea $A \in \delta(H)$, $A \geqslant 0$ y totalmente continuo. Demostrar que $\sqrt{A}$ es totalmente continuo.

18.55. Sean A, $B \in \delta(H)$, $0 \leqslant A \leqslant B$ y B un operador totalmente continuo. Demostrar que A es un operador totalmente continuo.

18.56. Sea un operador U definido en todo un espacio de Hilbert complejo H y sea que lo aplica sobre todo el H. Se llama *unitario* si para cualesquiera $x, y \in H$ se cumple la igualdad $(Ux, Uy) = (x, y)$. Demostrar que:

a) un operador unitario es lineal y acotado;

b) un operador unitario tiene inverso que también es unitario;

c) el producto de dos operadores unitarios es operador unitario;

d) un operador isométrico lineal, dado sobre todo el H y que lo aplica sobre todo el H, es un operador unitario;

e) un operador $U \in \mathcal{L}(H)$ es unitario si, y sólo si, $U^* = U^{-1}$.

18.57. Sean $A \in \mathcal{L}(H)$ y continuamente invertible y $B = \sqrt{A^*A}$.

a) Demostrar que $B \in \delta(H)$, $B \geqslant 0$ y es continuamente invertible.

b) Hagamos $U = AB^{-1}$, de modo que es válida la representación $A = UB$ que se llama *descomposición polar*. Demostrar que U es un operador unitario.

§ 19. Espectro de un operador lineal

Sean: X, un espacio de Banach complejo; $A: X \to X$, un operador lineal con el campo de definición $D(A)$ denso en X, y λ un número complejo.

Un punto λ se denomina *punto regular* del operador A si el operador $A - \lambda I$ es continuamente invertible. El conjunto de los puntos regulares del operador A se denomina *conjunto resolvente* del operador A y se designa por $\rho(A)$. Si $\lambda \in \rho(A)$, un operador lineal acotado $R_\lambda(A) = (A - \lambda I)^{-1}$ se llama *resolvente* del operador A. El complemento del conjunto $\rho(A)$ en el plano complejo se denomina *espectro* del operador A y se denota mediante $\sigma(A)$.

TEOREMA 19.1. *El espectro de un operador $A \in \mathcal{L}(X)$ es un conjunto cerrado que está situado en el círculo $|\lambda| \leqslant \|A\|$.*

Un número $\lambda \in \mathbf{C}$ se llama *valor propio* de un operador A, si existe un elemento $x \in D(A)$, $x \neq 0$, tal que $Ax = \lambda x$. Con esto x se llama *vector propio* del operador A correspondiente al valor propio λ. Todo valor propio del A es punto de su espectro con tal que el operador $A - \lambda I$ es no invertible.

TEOREMA 19.2. *Sea* $A \in \mathcal{L}(X)$ *donde* X *es un espacio de Banach. Entonces existe el límite finito*

$$r_\sigma(A) = \lim_{n \to \infty} \| A^n \|^{1/n}.$$

llamado radio espectral del operador A. *Al mismo tiempo,*

$$\inf_{n \geqslant 1} \| A^n \|^{1/n} = r_\sigma(A) \leqslant \| A \|.$$

TEOREMA 19.3. *Sea* $A \in \mathcal{L}(X)$ *donde* X *es un espacio de Banach. Si* $|\lambda| > r_\sigma(A)$, *entonces* $\lambda \in \rho(A)$.

Una función-operador $A(\lambda)$ se denomina analítica en un punto λ_0, si se desarrolla en un entorno del punto λ_0 en una serie de potencias

$$A(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k (\lambda - \lambda_0)^k,$$

que converge según la norma de $\mathcal{L}(X)$ en este entorno.

TEOREMA 19.4. $R_\lambda(A)$ *es una función analítica de* λ *en cualquier punto* $\lambda \in \rho(A)$. *Si* $A \in \mathcal{L}(X)$, *entonces, para* $|\lambda| > r_\sigma(A)$

$$R_\lambda(A) = -\sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{-n-1} A^n.$$

TEOREMA 19.5. *Si* $A \in \mathcal{L}(X)$ *donde* X *es un espacio de Banach, entonces* $\sigma(A)$ *es un conjunto no vacío.*

19.1. Sea $A: X \to X$ un operador lineal, y sea que el operador A^{-1} existe. Demostrar que A y A^{-1} tienen los mismos vectores propios.

19.2. ¿Puede tener valores propios no nulos un operador $A \in \mathcal{L}(X)$ que satisface la condición $A^2 = 0$?

19.3. Sea $A \in \mathcal{L}(X)$ y sea que el operador A^2 tiene vector propio. Demostrar que A tiene vector propio.

19.4. En el espacio lineal real $C[-\pi, \pi]$ hallar valores propios y vectores propios del operador:

a) $Ax(t) = x(-t)$;

b) $Ax(t) = \int_{-\pi}^{\pi} \cos(s+t)\, x(s)\, ds$.

19.5. En el espacio lineal real $C[0, \pi]$ hallar valores propios y vectores propios del operador $Ax(t) = d^2x/dt^2$ si:

a) $D(A) = \{x(t) \in C[0, \pi]: x'' \in C[0, \pi], x(0) = x(\pi) = 0\}$;

b) $D(A) = \{x(t) \in C[0, \pi]: x'' \in C[0, \pi], x'(0) = x'(\pi) = 0\}$;

c) $D(A) = \{x(t) \in C[0, \pi]: x'' \in C[0, \pi], x(0) = x(\pi), x'(0) = x'(\pi)\}$.

19.6. Sea $A \in \mathscr{L}(X)$, donde X es un espacio de Banach. Demostrar que para $|\lambda| > r_\sigma(A)$ se cumple la desigualdad $\| R_\lambda(A) \| \leqslant (|\lambda| - \| A \|)^{-1}$.

19.7. Demostrar que un operador y su resolvente son conmutables.

19.8. Demostrar que si $\lambda, \mu \in \rho(A)$, entonces

$$R_\lambda(A) - R_\mu(A) = (\lambda - \mu) R_\lambda(A) R_\mu(A) = (\lambda - \mu) R_\mu(A) R_\lambda(A)$$

19.9. Sean $A, B \in \mathscr{L}(X)$ y $\lambda \in \rho(A) \cap \rho(B)$. Demostrar que

$$R_\lambda(A) - R_\lambda(B) = R_\lambda(A)(B - A) R_\lambda(B).$$

19.10. Sea que los operadores A y B están definidos sobre todo el X. Demostrar que para que A y B sean conmutables es necesario que B sea conmutable con $R_\lambda(A)$ para cualquier $\lambda \in \rho(A)$ y es suficiente que B y $R_\lambda(A)$ sean conmutables, por lo menos, para un $\lambda \in \rho(A)$.

19.11. Sean $A, B \in \mathscr{L}(X)$, $\lambda \in \rho(A)$, $\| B - A \| < \| R_\lambda(A) \|^{-1}$. Demostrar que $\lambda \in \rho(B)$ y

$$R_\lambda(B) = R_\lambda(A) \sum_{n=0}^{\infty} [(A - B) R_\lambda(A)]^n.$$

19.12. Sean $A \in \mathscr{L}(X)$, $\lambda \in \rho(A)$ y $\mu \in \mathbf{C}$ tal, que $|\mu| \leqslant \| R_\lambda(A) \|^{-1}$. Demostrar que $\lambda - \mu \in \rho(A)$.

19.13. Sean $A \in \mathscr{L}(X)$. ¿Puede ser totalmente continuo el operador $R_\lambda(A)$?

19.14. En el espacio $C[0, 1]$ consideremos el operador $Ax(t) = tx(t)$. Demostrar que $\sigma(A) = [0, 1]$, con tal que ningún punto del espectro es valor propio.

19.15. En el espacio $C[0, 2\pi]$ consideremos el operador $Ax(t) = e^{it}x(t)$. Demostrar que $\sigma(A) = \{\lambda \in \mathbf{C}: |\lambda| = 1\}$.

19.16. En el espacio $C[0, 1]$ consideremos el operador $Ax(t) = x(0) + tx(1)$. Hallar $\sigma(A)$, $r_\sigma(A)$, $R_\lambda(A)$.

19.17. Sea M un subespacio no nulo de un espacio de Hilbert A. Hallar el espectro de un operador P de proyección ortogonal sobre M. Representar la resolvente $R_\lambda(P)$ mediante P.

19.18. En el espacio $C[0, 1]$ consideremos el operador

$$Ax(t) = \int_0^1 x(\tau)\, d\tau.$$

Hallar $\sigma(A)$, $R_\lambda(A)$.

19.19. Sea e_n ($n \in \mathbf{N}$) una base ortonormalizada en un espacio de Hilbert H. Definamos un operador $A: H \to H$ mediante las igualdades $Ae_1 = 0$, $Ae_{k+1} = e_k$ ($k \in \mathbf{N}$).

a) Demostrar que $A \in \mathcal{L}(H)$.

b) Hallar el operador A^*.

c) Demostrar que $\sigma(A) = \{\lambda \in \mathbf{C}: |\lambda| \leqslant 1\}$, además, el interior del círculo se compone de valores propios de A.

d) Demostrar que $\sigma(A^*) = \{\lambda \in \mathbf{C}: |\lambda| \leqslant 1\}$, además, A^* no tiene valores propios.

19.20. Consideremos el operador $A: l_2 \to l_2$, $Ax = (\lambda_1 x_1, \lambda_2 x_2, \ldots)$ para $x = (x_1, x_2, \ldots) \in l_2$ donde $\lambda_n \in \mathbf{C}$ ($n \in \mathbf{N}$), $\sup\limits_n |\lambda_n| < \infty$. Hallar $\sigma(A)$.

19.21. Demostrar que todo conjunto bicompacto en el plano complejo es espectro de un operador $A \in \mathcal{L}(l_2)$.

19.22. En el espacio $C[0, 1]$ consideremos $Ax(t) = dx/dt$. Demostrar que

a) $\sigma(A)$ es vacío si

$$D(A) = \{x(t) \in C[0, 1]: x' \in C[0, 1],\ x(0) = 0\};$$

b) $\sigma(A)$ comprende solamente los valores propios que llenan todo el plano complejo si

$$D(A) = \{x(t) \in C[0, 1]: x' \in C[0, 1]\};$$

c) $\sigma(A)$ se compone de los valores propios $2\pi n$ *in* ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$), si

$$D(A) = \{x(t) \in C[0, 1]: x' \in C[0, 1],\ x(0) = x(1)\}.$$

19.23. Sean $A, B \in \mathcal{L}(X)$. Demostrar que elementos no nulos $\sigma(AB)$ y $\sigma(BA)$ coinciden.

19.24. Sean $A \in \mathcal{L}(X)$, $\lambda \in \mathbf{C}$ y sea que existe una sucesión $x_n \in X$ ($n \in \mathbf{N}$) tal, que $\|x_n\| = 1$ y $Ax_n - \lambda x_n \to 0$. Demostrar que $\lambda \in \sigma(A)$.

19.25. Sean $A \in \mathcal{L}(X)$ y $\lambda \in \sigma(A)$. Demostrar que $\lambda^n \in \sigma(A^n)$ para todo n natural.

19.26. Sea $A \in \mathcal{L}(X)$ y continuamente invertible. Demostrar que si $\lambda \in \sigma(A^{-1})$, $\lambda^{-1} \in \sigma(A)$ y, a la inversa, si $\mu \in \sigma(A)$, $\mu^{-1} \in \sigma(A^{-1})$.

19.27. Sea H un espacio de Hilbert, $A \in \mathcal{L}(H)$ y es normal, es decir, satisface la condición $AA^* = A^*A$. Demostrar que si $r_\sigma(A) = 0$, $A = 0$.

19.28. Sean H un espacio de Hilbert y $A \in \mathcal{L}(H)$. Demostrar que los operadores AA^* y A^*A tienen valores propios no nulos iguales.

19.29. Consideremos el operador A: $L_2[a, b] \to L_2[a, b]$,

$$Ax(s) = \int_a^s K(s, t)\, x(t)\, dt,$$

donde $K(s, t)$ es continua en el triángulo $a \leqslant t \leqslant s$, $a \leqslant s \leqslant b$. Demostrar que $r_\sigma(A) = 0$. ¿Será $\lambda = 0$ un valor propio del operador A?

19.30. Demostrar que $r_\sigma(A) = \| A \|$ para un operador autoconjugado en un espacio de Hilbert.

19.31. Sea $A \in \mathcal{L}(X)$, donde X es un espacio de Banach. Demostrar que en la circunferencia $|\lambda| = r_\sigma(A)$ existe, por lo menos, un punto de $\sigma(A)$.

19.32. Sean $A, B \in \mathcal{L}(X)$, donde X es un espacio de Banach, $AB = BA$. Demostrar que

$r_\sigma(A + B) \leqslant r_\sigma(A) + r_\sigma(B)$, $r_\sigma(AB) \leqslant r_\sigma(A)\, r_\sigma(B)$.

19.33. Sean: H, un espacio de Hilbert; $A \in \mathcal{L}(H)$. Demostrar que $\sigma(A^*) = \overline{\sigma(A)}$ (la raya significa la conjugación compleja).

§ 20. Espectro de un operador autoconjugado y totalmente continuo

TEOREMA 20.1. *Sean X un espacio de Banach complejo, $A \in \sigma(X)$. Entonces el espectro de A comprende no más de un conjunto numerable de valores propios, para los cuales sólo el punto $\lambda = 0$ puede ser el único punto de acumulación. Si X es de dimensión infinita, entonces, $0 \in \sigma(A)$. El subespacio propio de A, que corresponde al valor propio $\lambda \neq 0$, es de dimensión finita.*

TEOREMA 20.2. *Sea A un operador autoconjugado y totalmente continuo en un espacio de Hilbert complejo H. Entonces:*

1) *si $A \neq 0$, entonces A tiene, por lo menos, un valor propio distinto de cero;*

2) *todos los valores propios de A son reales y están situados en el segmento $[m, M]$, donde*

$$m = \inf_{\|x\|=1} (Ax, x) \quad M = \sup_{\|x\|=1} (Ax, x);$$

3) *si* $M \neq 0$, *entonces* M *es el valor propio máximo de* A, *si* $m \neq 0$, *entonces* m *es el valor propio mínimo de* A.

TEOREMA 20.3. *Si* A *es un operador autoconjugado y totalmente continuo en un espacio de Hilbert complejo* H, *entonces para todo* $x \in H$ *el elemento* Ax *se desarrolla según el sistema ortonormalizado de vectores propios de* A, *en la serie de Fourier convergente.*

TEOREMA 20.4. *Si* A *es un operador autoconjugado y totalmente continuo en un espacio de Hilbert complejo separable* H, *entonces en* H *existe la base ortonormalizada de vectores propios del operador* A.

20.1. Demostrar que el operador A: $l_2 \to l_2$, $Ax = (0, x_1, x_2/2, x_3/3, \ldots)$ para $x = (x_1, x_2, \ldots) \in l_2$ es totalmente continuo y hallar su espectro.

20.2. Demostrar que el operador A: $L_2[-1, 1] \to L_2[-1, 1]$,

$$Ax(s) = \int_{-1}^{1} s^2 t x(t)\, dt$$

es totalmente continuo y hallar su espectro.

20.3. Demostrar que el operador A: $L_2[0, 1] \to L_2[0, 1]$,

$$Ax(s) = \int_{0}^{1} st(1 - st)\, x(t)\, dt$$

es totalmente continuo y hallar su espectro.

20.4. Sea $A \in \sigma(X)$ donde X es un espacio de Banach, $\lambda \neq 0$. Demostrar que $R(A - \lambda I)$ es cerrado en X.

20.5. Demostrar que vectores propios de un operador autoconjugado, que corresponden a distintos valores propios, son ortogonales.

20.6. Demostrar que, en un espacio de Hilbert (véase el problema 18.50), los vectores propios de un operador normal correspondientes a distintos valores propios, son ortogonales.

20.7. Demostrar que el operador A: $L_2[0, 1] \to L_2[0, 1]$, $Ax(t) = tx(t)$ es autoconjugado y hallar su espectro.

20.8. Demostrar que el espectro de un operador autoconjugado es real y está situado en el segmento $[m, M]$.

20.9. Demostrar que un operador autoconjugado es no negativo si, y sólo si, la desigualdad $\lambda \geqslant 0$ se cumple para cualquier $\lambda \in \sigma(A)$.

20.10. Sea A un operador autoconjugado en H y sea que λ no es un valor propio. Demostrar que $R(A - \lambda I)$ es siempre densa en H.

20.11. Sea A un operador autoconjugado en H y $R(A - \lambda I) = H$. Demostrar que $\lambda \in \rho(A)$.

20.12. Sean A un operador autoconjugado en H y $\lambda \in \rho(A)$ un número real. Demostrar que la resolvente $R_\lambda(A)$ es un operador autoconjugado.

20.13. Sean: A, un operador autoconjugado en H, y $\lambda \in \rho(A)$, $\operatorname{Im} \lambda \neq 0$. Demostrar que $\| R_\lambda(A) \| \leqslant |\operatorname{Im} \lambda|^{-1}$.

20.14. Sea A un operador totalmente continuo en un espacio de Banach complejo X. ¿Puede ser de dimensión infinita el subespacio propio de A que corresponde al valor propio $\lambda = 0$?

20.15. Sea que en un espacio de Hilbert de dimensión infinita H, un operador autoconjugado y totalmente continuo A tiene un conjunto finito de valores propios. Demostrar que $\lambda = 0$ es valor propio del operador A.

20.16. Sean: e_n, $(n \in \mathbf{N})$ una base ortonormalizada de un espacio de Hilbert H; $\lambda_n \in \mathbf{R}$, $\lambda_n \to 0$; $A: H \to H$, un operador lineal tal, que para todo $x \in H$ es válido el desarrollo en la serie de Fourier

$$Ax = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n (x, e_n) e_n$$

Demostrar que A es un operador autoconjugado y totalmente continuo.

20.17. Consideremos el operador A: $L_2[0, 1] \to L_2[0, 1]$,

$$Ax(t) = \int_0^1 K(t, s) x(s) ds,$$

donde

$$K(t, s) = \begin{cases} t(1-s) & \text{para } 0 \leqslant t \leqslant s \leqslant 1, \\ s(1-t) & \text{para } 0 \leqslant s \leqslant t \leqslant 1. \end{cases}$$

Demostrar que A es un operador autoconjugado y totalmente continuo y hallar sus valores y vectores propios.

20.18. Sea A un operador autoconjugado en un espacio de Hilbert separable H, cuyo espectro se compone de los valores propios $\lambda = 0$ y $\lambda = 1$. Demostrar que A es un operador de proyección ortogonal.

20.19. Sea A un operador totalmente continuo en un espacio de Hilbert separable H.

a) Demostrar que A^*A es un operador autoconjugado y totalmente continuo.

b) Demostrar que en la representación

$$A^*Ax = \sum_n \mu_n (x,\ h_n)\ h_n,$$

que se deduce del teorema 20.3, todos los $\mu_n > 0$.

c) Sean $\lambda_n = \sqrt{\mu_n}$, $e_n = \frac{1}{\lambda_n} Ah_n$. Demostrar que e_n es un sistema ortonormalizado y para todo $x \in H$ es válida la representación

$$Ax = \sum_n \lambda_n (x,\ h_n)\ e_n$$

(con la particularidad de que los λ_n se denominan *números singulares* del operador A).

20.20. Sean: A, un operador autoconjugado totalmente continuo en un espacio de Hilbert separable H; h_k ($k \in \mathbf{N}$), una base ortonormalizada compuesta de vectores propios del operador A con valores propios λ_k, y $f \in H$, $\lambda \in \mathbf{C}$. Demostrar que la solución de la ecuación $(A - \lambda I)\ x = f$:

a) tiene la forma

$$x = \frac{1}{\lambda}\left[\sum_n \frac{\lambda_n}{\lambda_n - \lambda}\ (f,\ h_n)\ h_n - f\right],$$

si λ es distinto de todos los valores propios λ_n;

b) para $\lambda = \lambda_j = \lambda_{j+1} = \ldots = \lambda_{j+n-1}$ existe si, y sólo si, $(f,\ h_{j+k}) = 0$ para $k = 0,\ 1,\ \ldots,\ n-1$, y en este caso la solución tiene la forma

$$x = \frac{1}{\lambda}\left[\sum_k \frac{\lambda_k}{\lambda_k - \lambda}\ (f,\ h_k)\ h_k - f\right] + \sum_{k=0}^{n-1} C_k h_{j+k},$$

con tal que en $\sum_k$ están omitidos los sumandos con números $j,\ j+1,\ \ldots,\ j+n-1$, y $C_0,\ C_1,\ \ldots,\ C_{n-1}$ con constantes arbitrarias.

§ 21. Ecuaciones integrales lineales

Se llama *ecuación integral de Fredholm de segunda especie* a una ecuación de tipo

$$x(s) - \lambda \int_a^b K(s,\ t)\ x(t)\ dt = f(s) \qquad (1)$$

donde $x(s)$ es la función incógnita $K(s, t)$, $f(s)$ son funciones dadas, λ es un parámetro numérico. Respecto a la función $K(s, t)$, llamada *núcleo* de la ecuación (1), se supone que

$$\int_a^b \int_b K^2(s, t)\, ds\, dt < \infty .$$

Si $K(s, t) = 0$ para $t > s$, la ecuación (1) toma la forma

$$x(s) - \lambda \int_a^s K(s, t)\, x(t)\, dt = f(s) \qquad (2)$$

y se llama *ecuación de Volterra de segunda especie.*

Si el núcleo de la ecuación (1) es *degenerado*, o sea, tiene la forma

$$K(s, t) = \sum_{i=1}^{n} f_i(s)\, g_i(t),$$

donde las funciones $f_i(s)$, $g_i(t)$ para $i = 1, 2, \ldots, n$, son continuas y linealmente independientes, (1) se puede escribir en la forma

$$x(s) = f(s) + \lambda \sum_{i=1}^{n} C_i f_i(s)$$

y las incógnitas C_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ se determinan resolviendo el sistema de ecuaciones algebraicas lineales.

Introducimos el *operador integral de Fredholm*

$$Ax = \int_a^b K(s, t)\, x(t)\, dt;$$

si el núcleo $K(s, t)$ y la función $f(s)$ son continuos, entonces $A: C[a, b] \to C[a, b]$; en el caso general, si $f(s) \in L_2[a, b]$, entonces $A: L_2[a, b] \to L_2(a, b]$. Entonces la ecuación (1) toma la forma

$$x - \lambda A x = f, \qquad (3)$$

y la conjugada a ésta en el espacio $L_2[a, b]$ tiene la forma

$$y - \overline{\lambda} A^* y = \varphi \qquad (4)$$

y puesto que el operador A es totalmente continuo, pueden aplicarse teoremas de Fredholm 16.6—16.8.

Si para un $\lambda \neq 0$ la ecuación homogénea

$$x(s) - \lambda \int_a^b K(s, t)\, x(t)\, dt = 0$$

tiene solución no nula $x_0(s) \in L_2[a, b]$, entonces λ se llama *número característico* del núcleo (de la ecuación), $x_0(s)$ *función propia* del núcleo (de la ecuación), y el número máximo de funciones propias linealmente independientes, que corresponden al número característico λ, se denomina *multiplicidad* de este número.

Si el núcleo $K(s, t)$ en (1) es simétrico, el operador integral de Fredholm no es sólo totalmente continuo sino también autoconjugado. Si λ es el número característico, $1/\lambda$ es un valor propio del operador A, si $\mu \neq 0$ es un valor propio del operador A, $\lambda = 1/\mu$ es el número característico. Por eso se pueden aplicar los teoremas 20.1—20.4.

Para las mismas suposiciones que se utilizan en (1) y (2) las ecuaciones

$$\int_a^b K(s, t)\, x(t)\, dt = f(s), \tag{5}$$

$$\int_a^s K(s, t)\, x(t)\, dt = f(s) \tag{6}$$

se denominan respectivamente *ecuaciones de Fredholm y de Volterra de primera especie.*

Debido a los teoremas 16.9 y 16.10, para una función dada $f(s) \in L_2[a, b]$, la ecuación (5) puede no tener solución, pero si ésta existe, en virtud de que el operador A^{-1} es no acotado sobre $R(A)$, las soluciones de la ecuación (5) con los segundos miembros próximos respecto a la norma de $L_2[a, b]$ pueden distar una de otra. De este modo, el problema (5) es *incorrecto.* Al mismo tiempo, el problema (1) es *correcto*: si $(I - \lambda A)^{-1}$ existe, es acotado. *El método de regularización* [24] permite reducir el problema incorrecto (5) al correcto (1). Para el caso de $f \in R(A)$ este método se basa en las siguientes afirmaciones.

TEOREMA 21.1. *Sea $A \in \mathcal{S}(H)$ un operador totalmente continuo. Entonces para toda $f \in H$ y cualquier valor del parámetro de regularización $\alpha > 0$ existe la única solución $x_\alpha \in H$, sobre el cual se realiza*

$$\inf_{x \in H} \{ \| Ax - f \|^2 + \alpha \| x \|^2 \}.$$

Además, x_α es una solución de la ecuación de segunda especie

$$\alpha x + A^*Ax = A^*f. \tag{7}$$

TEOREMA 21.2. *Sea x_α una solución de la ecuación (7), $f \in R(A)$. Entonces para $\alpha \to 0$ la magnitud $\| Ax_\alpha - f \|^2$ disminuye monótonamente y tiende a cero.*

21.1. En el espacio $C[a, b]$ hallar la solución de la ecuación integral

$$x(s) - \lambda \int_a^b K(s, t)\, x(t)\, dt = f(s).$$

si

a) $a = -\pi/4$, $b = \pi/4$, $K(s, t) = \operatorname{tg} t$, $f(s) \equiv 1$;
b) $a = 0$, $b = \pi/2$, $K(s, t) = \operatorname{sen} s \cos t$, $f(s) = \operatorname{sen} s$;
c) $a = 0$, $b = \pi$, $K(s, t) = \operatorname{sen} s \operatorname{cov} t$, $f(s) = \operatorname{sen} s$;
d) $a = 0$, $b = 1$, $K(s, t) = s + t - 2st$, $f(s) = s + s^2$;
e) $a = -1$, $b = 1$, $K(s, t) = st - s^2t^2$, $f(s) = s^2 + s^4$;
f) $a = 0$, $b = 2\pi$, $K(s, t) = |\pi - t| \operatorname{sen} s$, $f(s) = s$;
g) $a = 0$, $b = \pi$, $K(s, t) = \operatorname{sen} t + t \cos s$, $f(s) = 1 - 2s/\pi$;
h) $a = 0$, $b = \pi$, $K(s, t) = \operatorname{sen}(s - 2t)$, $f(s) = \cos 2s$.

21.2. En el espacio $C[a, b]$ hallar los números característicos λ_i y las funciones propias φ_i para la ecuación

$$x(s) - \lambda \int_a^b K(s, t)\, x(t)\, dt = 0,$$

si:

a) $a = 0$, $b = 2\pi$, $K(s, t) = \operatorname{sen}(s + t)$;
b) $a = 0$, $b = \pi$, $K(s, t) = \cos(s + t)$;
c) $a = 0$, $b = 1$, $K(s, t) = 2st - 4s^2$;
d) $a = -1$, $b = 1$, $K(s, t) = st + s^2t^2$.

21.3. En el espacio $C[0, \pi]$ hallar los números característicos y las funciones propias para la ecuación

$$x(s) - \lambda \int_0^\pi K(s, t),\ x(t)\, dt = 0,$$

si

$$K(s, t) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \operatorname{sen} ns \operatorname{sen} nt.$$

21.4. En el espacio $C[a, b]$ hallar la solución de la ecuación integral

$$x(s) - \lambda \int_a^b K(s, t)\, x(t)\, dt = f(s)$$

para todos los valores de los parámetros α, β, γ que forman parte del miembro libre de esta ecuación si:

a) $a = -1$, $b = 1$, $K(s, t) = st$, $f(s) = \alpha s^2 + \beta s + \gamma$;

b) $a = 0$, $b = \pi$, $K(s, t) = \cos(s + t)$, $f(s) = \alpha \operatorname{sen} s + \beta$;

c) $a = -1$, $b = 1$, $K(s, t) = s^2 - 2st$, $f(s) = \alpha s^3 - \beta s$;

d) $a = -1$, $b = 1$, $K(s, t) = 3s + st - 5s^2t^2$, $f(s) = \alpha s$.

21.5. Demostrar que la ecuación

$$x(s) - \lambda \int_0^{2\pi} \operatorname{sen}(s - 2t)\, x(t)\, dt = f(s)$$

es resoluble para cualquier $\lambda \in C$ y cualquier $f(s) \in L_2[0, 2\pi]$ y hallar su solución.

21.6. En el espacio $C[a, b]$ hallar los números característicos λ_n y las funciones propias φ_n para la ecuación

$$x(s) - \lambda \int_a^b K(s, t)\, x(t)\, dt = 0,$$

si:

a) $a = 0$, $b = 1$,

$$K(s, t) = \begin{cases} s \text{ para } 0 \leqslant s \leqslant t \leqslant 1, \\ t \text{ para } 0 \leqslant t \leqslant s \leqslant 1; \end{cases}$$

b) $a = 0$, $b = \pi/2$,

$$K(s, t) = \begin{cases} \operatorname{sen} s \cos t \text{ para } 0 \leqslant s \leqslant t \leqslant \pi/2, \\ \operatorname{sen} t \cos s \text{ para } 0 \leqslant t \leqslant s \leqslant \pi/2; \end{cases}$$

c) $a = 0$, $b = \pi$,

$$K(s, t) = \begin{cases} \operatorname{sen} s \cos t \text{ para } 0 \leqslant s \leqslant t \leqslant \pi, \\ \operatorname{sen} t \cos s \text{ para } 0 \leqslant t \leqslant s \leqslant \pi, \end{cases}$$

d) $a=0,\ b=1,$

$$K(s,\ t)=\begin{cases} t\,(s+1) & \text{para } 0\leqslant s\leqslant t\leqslant 1,\\ s\,(t+1) & \text{para } 0\leqslant t\leqslant s\leqslant 1;\end{cases}$$

e) $a=0,\ b=1,\ K(s,\ t)=e^{-|s-t|}$;

f) $a=0,\ b=1,$

$$K(s,\ t)=\begin{cases} (s+1)\,(t-2) & \text{para } 0\leqslant s\leqslant t\leqslant 1,\\ (t+1)\,(s-2) & \text{para } 0\leqslant t\leqslant s\leqslant 1.\end{cases}$$

21.7. Sea que λ no es número característico para un núcleo simétrico $K(s, t)$. Demostrar que la solución de la ecuación

$$x(s)-\lambda\int_a^b K(s,\ t)\,x(t)\,dt=f(s)$$

en el espacio $L_2[a, b]$ se puede representar en la forma de serie de Fourier por las funciones propias del núcleo

$$x(s)=\lambda\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(f,\ \varphi_k)}{\lambda_k-\lambda}\,\varphi_k(s)+f(s),$$

y si el núcleo $K(s, t)$ es continuo, esta serie converge uniformemente sobre $[a, b]$.

21.8. Sea $\lambda=\lambda_j=\lambda_{j+1}=\ldots=\lambda_{j+n-1}$ un número característico de multiplicidad n para un núcleo simétrico $K(s, t)$. Demostrar que la solución de la ecuación

$$x(s)-\lambda\int_a^b K(s,\ t)\,x(t)\,dt=f(s)$$

en el espacio $L_2[a, b]$ existe si, y sólo si, $f(s)$ es ortogonal a todas las funciones propias $\varphi_{j+k}(s)$ $(j=0, 1, \ldots, n-1)$ correspondientes al número característico λ. Si esta condición se cumple, la solución de esta ecuación tiene la forma

$$x(s)=\lambda\sum_k\frac{(f,\ \varphi_k)}{\lambda_k-\lambda}\,\varphi_k(s)+\sum_{k=0}^{n-1}C_k\varphi_{j+k}(s),$$

donde C_k $(k=1, 2, \ldots, n-1)$, son constantes arbitrarias y en la primera suma están omitidos los sumandos con los números $j,\ j+1,\ \ldots,\ j+n-1$.

21.9. Hallar la solución de la ecuación

$$x(s) - \lambda \int_0^1 K(s, t)\, x(t)\, dt = f(s),$$

en el espacio $L_2[a, b]$ si:

a) $f(s) = s$,

$$K(s, t) = \begin{cases} s(t-1) & \text{para } 0 \leqslant s \leqslant t \leqslant 1, \\ t(s-1) & \text{para } 0 \leqslant t \leqslant s \leqslant 1; \end{cases}$$

b) $f(s) = \cos \pi s$,

$$K(s, t) = \begin{cases} (s+1)\, t & \text{para } 0 \leqslant s \leqslant t \leqslant 1, \\ (t+1)\, s & \text{para } 0 \leqslant t \leqslant s \leqslant 1. \end{cases}$$

21.10. Consideremos una ecuación diferencial lineal

$$\frac{d^n y}{dt^n} + a_1(t) \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \ldots + a_n(t)\, y = F(t) \qquad (*)$$

con los coeficientes continuos $a_k(t)$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ y las condiciones iniciales $y(0) = c_0$, $y'(0) = c_1$, $\ldots$, $\ldots$, $y^{n-1}(0) = c_{n-1}$.

a) Demostrar que para cualquier función continua $\varphi(x)$ es válida la fórmula

$$\underbrace{\int_0^x dx \int_0^x dx \ldots \int_0^x}_{k} \varphi(x)\, dx = \frac{1}{(k-1)!} \int_0^x (x-\xi)^{k-1} \varphi(\xi)\, d\xi.$$

b) Haciendo $d^n y/dt^n = x(t)$ y empleando el resultado del apartado anterior, demostrar que la ecuación (*), teniendo en cuenta las condiciones iniciales, equivale a la ecuación de Volterra de segunda especie

$$x(s) - \int_0^s K(s, t)\, x(t)\, dt = f(s),$$

donde

$$K(s, t) = -\sum_{m=1}^{n} a_m(s) \frac{(s-t)^{m-1}}{(m-1)!},$$

$$f(s) = F(s) - c_{n-1} a_1(s) - (c_{n-1} s + c_{n-2})\, a_2(s) - \ldots$$
$$\ldots - \left(c_{n-1} \frac{s^{n-1}}{(n-1)!} + \ldots + c_1 s + c_0\right) a_n(s).$$

21.11. Empleando la transformación de Laplace resolver la ecuación

$$x(s) - \int_0^s K(s-t)\, x(t)\, dt = f(s),$$

si:

a) $K(z) = e^{-2z}$, $f(s) = 1 + s$;
b) $K(z) = \operatorname{sen} z$, $f(s) = s$;
c) $K(z) = 2 \cos z$, $f(s) = e^s$;
d) $K(z) \equiv 1$, $f(s) = \cos s$.

21.12. Para la ecuación integral

$$x(s) - \int_0^s K(s,\ t)\, x(t)\, dt = f(s)$$

donde el núcleo $K(s, t)$ es continuo para $a \leqslant s,\ t \leqslant b$, $f(s) \in C[a, b]$, consideremos la partición del segmento $[a, b]$.

$$s_1 = a,\ s_2 = a + h, \ldots, s_{2n+1} = a + 2nh,\ h = \frac{b-a}{2n}.$$

Entonces, las igualdades

$$x(s_k) - \int_a^b K(s_k,\ t)\, x(t)\, dt = f(s_k),\ k = 1,\ 2,\ \ldots,\ 2n+1,$$

son exactas. Con la ayuda de la fórmula de Simpson las cambiamos por las aproximadas

$$x(s_k) - \sum_{m=1}^{2n+1} A_m K(s_k,\ s_m)\, x(s_m) = f(s_k),\ k = 1, 2, \ldots, 2n+1$$

donde $A_1 = A_{2n+1} = h/3$, $A_2 = A_4 = \ldots = A_{2n} = 4h/3$, $A_3 = A_5 \ldots = A_{2n-1} = 2h/3$. El sistema de ecuaciones algebraicas lineales obtenidas, respecto a las incógnitas $x(s_m)$ $(m = 1, 2, \ldots, 2n + 1)$, puede ser resuelta numéricamente; obtenemos como resultado valores aproximados de solución de la ecuación dada en los puntos de partición.

Elaborar y realizar en una computadora un algoritmo de solución numérica de la ecuación integral dada para $n = 5$, $n = 10$, $n = 15$ y comparar las aproximaciones obtenidas si:

a) $a = 0$, $b = 1$, $K(s, t) = s \cos st$, $f(s) = 1 - \operatorname{sen} s$;

b) $a = 0,\ b = 1,\ K(s,\ t) = s(e^{st} - 1),\ f(s) = e^s - s - 2$;

c) $a = 0,\ b = \pi,\ f(s) = \operatorname{sen} s$,

$$K(s,\ t) = \begin{cases} \operatorname{sen}\left(s + \frac{\pi}{4}\right) \operatorname{sen}\left(t - \frac{\pi}{4}\right) & \text{para } 0 \leqslant s \leqslant t \leqslant \pi; \\ \operatorname{sen}\left(t + \frac{\pi}{4}\right) \operatorname{sen}\left(s - \frac{\pi}{4}\right) & \text{para } 0 \leqslant t \leqslant s \leqslant \pi; \end{cases}$$

d) $a = -1,\ b = 1,\ K(s,\ t) = 1{,}125s^2 + 1{,}125t^2 - 3{,}375s^2t^2 - 1{,}5st - 1{,}875,\ f(s) = s$;

e) $a = -1,\ b = 1,\ K(s,\ t) = -1{,}125s^2 - 1{,}125t^2 + 3{,}375s^2t^2 + 1{,}5st + 1{,}875,\ f(s) = s$.

21.13. Sea que el núcleo y el segundo miembro de la ecuación (6) satisfacen las siguientes condiciones:

1) las funciones $K(s, t)$ y $K'_s(s, t)$ son continuas en el dominio $a \leqslant s \leqslant t \leqslant b$;

2) $K(s, s) \neq 0$ para todos los s;

3) $f(s) \in C^1[a,\ b],\ f(0) = 0$.

Demostrar que la ecuación (6) equivale a la ecuación de Volterra de segunda especie

$$x(s) + \int_a^s \frac{K'_s(s,\ t)}{K(s,\ s)}\, x(t)\, dt = \frac{f'(s)}{K(s,\ s)}$$

y, por consiguiente, en el segmento $[a, b]$ tiene solución única y continua.

21.14. En la clase de funciones continuas, ¿existe la solución de la ecuación

$$\int_0^s (t - s)\, x(t)\, dt = f(s)?$$

si:

a) $f(s) = \cos s$;

b) $f(s) = \operatorname{sen} s$;

c) $f(s) = \operatorname{sen}^2 s$.

21.15. Empleando la transformación de Laplace en el espacio $C[a.\ b]$ hallar la solución de la ecuación

$$\int_0^s K(s - t)\, x(t)\, dt = f(s).$$

si:

a) $K(z) = \cos z$, $f(s) = \operatorname{sen} s$;
b) $K(z) = \cos z$, $f(s) = s \operatorname{sen} s$;
c) $K(z) = \cos z$, $f(s) = s + s^2$;
d) $K(z) = e^z$, $f(s) = s^2$;
e) $K(z) = \operatorname{sen} z$, $f(s) = 1 - \cos s$.

21.16. Consideremos el operador $A: L_2[0, 1] \to L_2[0, 1]$,

$$Ax(s) = \int_0^1 e^{-|s-t|} x(t)\, dt$$

y la ecuación

$$Ax = f. \qquad (**)$$

1) Demostrar que $A^* = A$ y

$$A^*Ax(s) = \int_0^1 K(s, t)\, x(t)\, dt,$$

donde

$$K(s, t) = \begin{cases} -\dfrac{e^{-s-t} + e^{-2+s+t}}{2} + (t - s + 1)\, e^{s-t} \\ \qquad\qquad \text{para } 0 \leqslant s \leqslant t \leqslant 1, \\ -\dfrac{e^{-s-t} + e^{-2+s+t}}{2} + (s - t + 1)\, e^{t-s} \\ \qquad\qquad \text{para } 0 \leqslant t \leqslant s \leqslant 1, \end{cases}$$

2) Hallar $A^*f = Af$ y para $\alpha = 1$; 0,1; 0,01; 0,001 y $n = 10$, empleando el método descrito en el problema 21.12, resolver numéricamente la ecuación (7) si:

a) $f(s) = 2s + e^{-s} - 2e^{s-1}$;
b) $f(s) = e^s(1 - s) + \operatorname{sh} s$;
c) $f(s) = 2 - e^{-s} - e^{s-1}$;
d) $f(s) = \frac{1}{2}[(2s + 1)\, e^{-s} - e^{s-2}]$.

3) Demostrar que si $f(s) \in C^2[0, 1]$ y la ecuación (**) tiene solución $x(t)$, entonces $x(t)$ satisface la ecuación de Fredholm de segunda especie

$$x(s) - \frac{1}{2} \int_0^1 e^{-|s-t|} x(t)\, dt = -\frac{1}{2} f''(s).$$

4) Empleando los resultados del problema 21.6 e) y la afirmación del punto 3) demostrar que la ecuación (**) no tiene solución para $f(s) = as + b$, $ab \neq 0$.

5) Para $f(s) = s$, $\alpha = 1; 0{,}1; 0{,}01; 0{,}001$ y $n = 10$, resolver numéricamente, usando el método descrito en el problema 21.12, la ecuación (7) y explicar los resultados obtenidos.

§ 22. Operadores no acotados en un espacio de Hilbert

En un espacio de Hilbert complejo H consideremos un operador lineal A con el campo de definición $D(A)$ denso en H. Sea A^* un operador conjugado de A.

Un operador A se llama *simétrico* si $D(A^*) \supset D(A)$ y sobre $D(A)$ se cumple la igualdad $A^*x = Ax$. Un operador A se llama *autoconjugado* si $D(A^*) = D(A)$ y sobre $D(A)$ se cumple la igualdad $A^*x = Ax$. Así, la igualdad $(Ax, y) = (x, Ay)$, para cualesquiera $x, y \in D(A)$, es válida tanto para un operador simétrico como para un operador autoconjugado.

Un operador simétrico A se llama *no negativo* si $(Ax, x) \geqslant 0$ para todo $x \in D(A)$; *positivo* si $(Ax, x) \geqslant 0$ para todo $x \in D(A)$ y $(Ax, x) = 0$ sólo para $x = 0$; *definido positivo* si existe un $\gamma > 0$ tal, que para todo $x \in D(A)$ se cumple la desigualdad $(Ax, x) \geqslant \gamma \| x \|^2$.

El operador U: $L_2[a, b] \to L_2[a, b]$

$$Ux(t) = -\frac{d}{dt}\left[p(t)\frac{dx}{dt}\right] + q(t)x(t)$$

con el campo de definición $D(U)$ compuesto de funciones $x(t)$, que son dos veces continuamente diferenciables sobre $[a, b]$ y satisfacen las condiciones de frontera

$$\begin{cases} \alpha_1 x(a) - \alpha_2 x'(a) = 0, & \alpha_1^2 + \alpha_2^2 \neq 0, \\ \beta_1 x(b) + \beta_2 x'(b) = 0, & \beta_1^2 + \beta_2^2 \neq 0, \end{cases}$$

se llama *operador de Sturm—Liouville*. Con esto se supone que $p(t) \in C^1[a, b]$ y no se anula sobre $[a, b]$, $q(t) \in C[a, b]$.

TEOREMA 22.1. *El operador U es simétrico en el espacio $L_2[a, b]$.*

Se llama *función de Green* para el operador U a la función

$$G(s, t) = \begin{cases} -\frac{1}{W_0} u(s) v(t) & \text{para } a \leqslant s \leqslant t \leqslant b, \\ -\frac{1}{W_0} u(t) v(s) & \text{para } a \leqslant t \leqslant s \leqslant b, \end{cases}$$

donde $u(t)$ y $v(t)$ son soluciones no nulas de la ecuación $Ux = 0$ y son las que cumplen, respectivamente, las primeras y segundas condiciones de frontera $W_0 = p(t) W(t) = p(a) W(a)$,

$$W(t) = \begin{vmatrix} u(t) & v(t) \\ u'(t) & v'(t) \end{vmatrix}$$

es determinante de Wronsky.

TEOREMA 22.2. *Sean sobre todo el* $[a, b]$ $p(t) > 0$, $q(t) \geqslant 0$, $\alpha_1 \geqslant 0$; $\alpha_2 \geqslant 0$, $\beta_1 \geqslant 0$, $\beta_2 \geqslant 0$. *Si se cumple al menos una de las siguientes condiciones*:

a) $q(t) \not\equiv 0$; b) $\alpha_1 \neq 0$; c) $\beta_1 \neq 0$,

entonces para cualquier $f \in C[a, b]$ *la ecuación* $Ux = f$ *tiene la única solución* $x(s) \in D(U)$ *definida por la igualdad*

$$x(s) = \int_a^b G(s, t) f(t)\, dt.$$

22.1. En el espacio $L_2[0, 1]$ consideremos el operador $Ax(t) = -d^2x/dt^2$ con campo de definición $D(A)$ compuesto de funciones $x(t)$ tales, que $x(t) \in C^2[0, 1]$ y satisface las condiciones de frontera $x(0) = x(1) = 0$. Demostrar que A es un operador simétrico.

22.2. Demostrar que el operador del problema 22.1 es no negativo.

22.3. En el espacio $L_2[a, b]$ consideremos el operador $Ax(t) = i\frac{dx}{dt}$ con campo de definición $D(A)$ compuesto de funciones absolutamente continuas $x(t)$ tales, que $x'(t) \in L_2[a, b]$ y satisfacen las condiciones de frontera $x(a) = x(b) = 0$. Demostrar que el operador A es simétrico, pero no es autoconjugado.

22.4. En el espacio $L_2(-\infty, \infty)$ consideremos el operador $Ax(t) = tx(t)$ con campo de definición compuesto de funciones $x(t)$, para las cuales $tx(t) \in L_2(-\infty, \infty)$. Demostrar que A es un operador autoconjugado.

22.5. Demostrar que para cualquier operador A densamente definido en H, se cumple la relación $(\overline{R(A)})^{\perp} = N(A^*)$. ¿Es válida la relación $(N(A))^{\perp} = \overline{R(A^*)}$ en este caso?

22.6. Demostrar que un operador simétrico A, para el cual $R(A) = H$, es un operador autoconjugado.

22.7. Sean A, B operadores simétricos (autoconjugados) con campo de definición común D, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Demostrar que $\alpha A + \beta B$ es un operador simétrico (autoconjugado).

22.8. Sea A un operador simétrico con el campo de valores $R(A)$ denso en H. Demostrar que el operador A^{-1} existe y también es simétrico.

22.9. Sea $A \in \mathcal{L}(H)$ es un operador autoconjugado acotado y sea que el operador A^{-1} (acotado o no acotado) existe. Demostrar que A^{-1} es un operador autoconjugado.

22.10. Demostrar que los valores propios de un operador simétrico son reales y los vectores propios pertenecientes a diferentes valores propios son ortogonales.

22.11. Sea A un operador simétrico. Demostrar que las siguientes afirmaciones son equivalentes:

a) A es autoconjugado;

b) A es cerrado y $N(A^* \pm iI) = 0$;

c) $R(A \pm iI) = H$.

22.12. Consideremos la ecuación

$$p_0(t)\, x'' + p_1(t)\, x' + p_2(t)\, x = \varphi(t),$$

donde $p_0(t) \in C^1[a, b]$ y no se anula sobre $[a, b]$, y las funciones $p_1(t)$, $p_2(t)$, $\varphi(t)$ son continuas sobre $[a, b]$. Demostrar que multiplicando las dos partes de la ecuación por

$$h(t) = -\exp\left\{\int \frac{p_1(t) - p_0'(t)}{p_0(t)}\, dt\right\}$$

ésta se reduce a la forma $Ux = f$.

22.13. Hallar la función de Green para el operador U para las condiciones de frontera:

a) $Ux = -x''$, $x(0) = x(1) = 0$;

b) $Ux = -x''$, $x'(0) = x(0)$, $x'(1) + x(1) = 0$;

c) $Ux = -x'' - x$, $x(0) = x\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$;

d) $Ux = -x'' + x$, $x(0) = x(1) = 0$;

e) $Ux = -x'' + x$, $x(0) = x'(0)$, $x(1) + \gamma x'(1) = 0$, $\gamma \in \mathbb{R}$.

22.14. Reducir a la ecuación integral en el espacio $L_2[0, 1]$ la búsqueda de la solución de la ecuación diferencial dada para las condiciones de frontera indicadas:

a) $-(1 + t^2)\, x'' - 2tx' + \lambda x = 0$, $x(0) = x'(1) = 0$;

b) $-x'' + \lambda x = f(t)$, $x(0) = 2x'(0)$, $x(1) = 0$;

c) $-x'' + \lambda x = f(t)$, $x(0) + x'(0) = 0$, $x(1) = 0$.

22.15. Demostrar que para las suposiciones del teorema 22.2:

a) el operador de Sturm—Liouville es no negativo;

b) el conjunto de valores propios del operador de Sturm—Liouville es no vacío, no más que numerable y no tiene puntos límites finitos;

c) todos los valores propios del operador de Sturm—Liouville son positivos;

d) el subespacio propio del operador de Sturm—Liouville correspondiente al valor propio dado es unidimensional;

e) el sistema de valores propios del operador de Sturm—Liouville es denso en el espacio $L_2[a, b]$.

22.16. Demostrar que para las suposiciones del teorema 22.2:

a) la forma cuadrática (Ux, x) llega a su mínimo sobre el conjunto $D = D(U) \cap \sigma_1(0)$;

b) $\min\limits_{x \in D} (Ux, x) = (Ux_0, x_0) = \lambda$, donde λ es el valor propio mínimo de U y x_0 es una función propia normada con el valor propio λ.

22.17. Empleando el problema anterior demostrar que el valor mínimo de la funcional

$$\varphi(x) = \int_0^1 [x'(t)]^2 dt$$

considerada sobre un conjunto de funciones $x(t)$, dos veces continuamente diferenciables sobre $[0, 1]$ y que satisfacen las condiciones

$x(0) = x(1) = 0$, $\int\limits_0^1 x^2(t)\, dt = 1$, es igual a π^2; hallar la función $x_0(t)$, sobre la cual este valor se realiza.

22.18. Demostrar que el operador U: $L_2[a, b] \to L_2[a, b]$, $Ux(t) = -d^2x/dt^2$ con campo de definición

$$D(U) = \{x(t) \in L_2[a, b]: x(t) \in C^2[a, b],\ x(a) = x(b) = 0\}$$

es:

a) positivo;

b) definido positivo.

22.19. Demostrar que para un operador positivo A y una función arbitraria $f \in H$ la ecuación $Ax = f$ no puede tener más de una solución.

22.20. Al considerar el operador U del problema 22.18, comprobar que la solución de la ecuación $Ux = f$ existe sólo para algunas $f \in L_2[a, b]$.

22.21. Para un operador positivo A y un elemento fijado $f \in H$ consideremos una funcional de la energía

$$F(x) = (Ax, x) - 2\mathrm{Re}(x, f)$$

definida sobre $D(A)$. Demostrar que si la ecuación $Ax = f$ tiene solución, en ésta, precisamente, se realiza el mínimo de $F(x)$.

22.22. En las condiciones del problema anterior demostrar que si existe el elemento $x_0 \in D(A)$, sobre el cual se realiza el mínimo de la funcional de la energía $F(x)$, entonces x_0 satisface la ecuación $Ax = f$.

22.23. Demostrar que para un operador positivo A la igualdad $[x, y]_A = (Ax, y)$ da un nuevo producto escalar (llamado energético) para $x, y \in D(A)$.

22.24. Para un operador definido positivo A y $x \in D(A)$, la norma energética se introduce por la igualdad

$$\| x \|_A = \sqrt{[x, x]_A} = \sqrt{(Ax, x)}.$$

Demostrar que si A es un operador acotado, la norma energética equivale a la norma de H.

22.25. Para un operador definido positivo A consideremos una completación H_A de la variedad lineal $D(A)$ respecto a la norma energética (el espacio energético del operador A). Demostrar que H_A está encajado en H y es denso en él.

22.26. Demostrar que el espacio energético H_U del operador U del problema 22.18, es un espacio de Sóbolev $\mathring{W}_2^1[a, b]$ (véase el problema 4.27).

22.27. Sea A un operador definido positivo. Demostrar que su funcional de la energía (véase el problema 22.21) puede estar prolongado desde $D(A)$ sobre el espacio energético H_A.

22.28. Demostrar que en el espacio energético H_A de un operador definido positivo A existe un elemento x_0 y, además, es el único, sobre el cual la funcional de la energía llega al mínimo (en correspondencia con las afirmaciones de los problemas 22.21 y 22.22, x_0 se llama *solución generalizada* de la ecuación $Ax = f$).

Operadores y ecuaciones no lineales en espacios de Banach

§ 23. Diferenciación de operadores no lineales

Sean: X, Y, espacios de Banach, y F: $X \to Y$, un operador no lineal con campo de definición $D(F) \subset X$. Se denomina:

continuo en el punto $x_0 \in D(F)$ si de $x_n \in D(F)$, $\| x_n - x_0 \| \to 0$ para $n \to \infty$ se deduce que $\| F(x_n) - F(x_0) \| \to 0$ para $n \to \infty$;

continuo sobre un conjunto $M \subset D(F)$ si es continuo en cada punto $x_0 \in D(F)$;

totalmente continuo si es continuo sobre $D(F)$ y transforma todo conjunto acotado, situado en $D(F)$, en un conjunto compacto en el espacio Y;

acotado sobre un conjunto $M \subset D(F)$ si $\sup\limits_{x \in M} \| F(x) \| < \infty$.

Un operador no lineal $F(x)$ definido en un entorno S de un punto x_0 de un espacio de Banach X y con valores en un espacio de Banach Y, se denomina *diferenciable en el punto* x_0 *en el sentido de Fréchet* si existe un operador lineal $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ tal que para todos los $x \in S$

$$F(x) - F(x_0) = A(x - x_0) + \omega(x - x_0),$$

donde $\| \omega(x - x_0) \| = o(\| x - x_0 \|)$ cuando $x \to x_0$. Con esto el operador A se denomina *derivada de Fréchet* del operador F en el punto y se denota mediante $F'(x_0)$, mientras que la expresión $F'(x_0)\, h = dF(x_0; h)$ se llama *diferencial de Fréchet* del operador F en el punto x_0 para el incremento h.

Sea $F_k(x_1, \ldots, x_k)$ un operador que depende de k variables $x_1, \ldots, x_k \in X$ con valores en Y. El operador $F_k(x_1, \ldots, x_k)$ se denomina *k-lineal* si es lineal respecto a cada uno de sus argumentos x_i con los restantes fijados. Un operador k-lineal $F_k(x_1, \ldots, x_k)$ se denomina *acotado* si existe una constante $m \in \mathbf{R}$, $m > 0$ tal, que

$$\| F_k(x_1, \ldots, x_k) \| \leqslant m \| x_1 \| \ldots \| x_k \|.$$

La menor de estas constantes m se llama *norma* de F_k y se designa por $\| F_k \|$. Un operador k-lineal $F_k(x_1, \ldots, x_k)$ se llama *simétrico* si sus valores no varían para ninguna reordenación de sus argumentos. Sea $F_k(x_1, \ldots, x_k)$ un operador simétrico k-lineal. El operador $F_k(x_1, \ldots, x_k)$ se denomina operador *k-potencial* y se denota mediante $F_k x^k$.

En adelante el operador k-lineal se escribirá $F_k x_1, \ldots, x_k$.

Sean: un operador $F(x)$ diferenciable en un entorno S, y el diferencial $dF(x; h)$, también diferenciable en un punto x_0:

$$F'(x_0 + g)\, h - F'(x_0)\, h = (Bg)\, h + \rho(g)\, h,$$

donde $\| \rho(g) \| = o(\| g \|)$ para $g \to 0$. Con esto el operador $B = F''(x_0) \in \mathcal{L}(X, \mathcal{L}(X, Y))$ se denomina *segunda derivada* del operador $F(x)$ en el punto x_0. De la definición de $F''(x_0)$ se desprende que $F''(x_0)\, hg$ es un operador simétrico bilineal acotado. En adelante

$$d^2F(x_0; h) = d[dF(x; h);\ x_0,\ g]\,|_{g=h},$$

de donde $d^2F(x_0; h) = F''(x_0)\, h^2$ es un operador cuadrático o bipotencial, obtenido del bilineal cuando $g = h$.

Si $d^nF(x; h) = F^{(n)}(x)\, h^n$ ya está definido, suponiendo su diferenciabilidad en el punto x_0 se pone

$$d^{n+1}F(x_0; h) = d\{d^nF(x; h);\ x_0,\ g\}|_{g=h},$$

de donde $d^{n+1}F(x_0; h) = F^{n+1}(x_0)\, h^{n+1}$. El operador $F^{(n)}(x_0)\, h_1, \ldots, h_n$ es un operador simétrico n-lineal, y $d^nF(x_0; h)$, un operador n-potencial.

Sean: $F_k x^k$ operadores k-potenciales de X en Y ($k \in \mathbf{N}$), y $F_0 \in Y$. Compongamos una serie de potencias formal

$$\sum_{k=0}^{\infty} F_k x^k \quad (F_0 x^0 = F_0).$$

Supongamos que la serie numérica

$$\sum_{k=0}^{\infty} \| F_k \| \| x \|^k,$$

que mayora la de potencias que consideramos, tiene *radio de convergencia* $\rho_u > 0$. Entonces, en toda bola $S_\rho(0)$, donde $\rho \in (0, \rho_u)$, la serie de potencias dada converge absoluta y uniformemente. Sean $\rho_u > 0$ y $F(x)$ la suma de la serie de

potencias dada, es decir,

$$\sum_{k=0}^{n} F_k x^k \to F(x)$$

cuando $n \to \infty$. Entonces el operador $F(x)$ se llama *operador analítico* en el punto $x = 0$.

Si está dado un operador infinitamente diferenciable $F(x)$, la serie de potencias

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{F(k)0}{k!} x^k$$

se llama *serie de Taylor de* $F(x)$ en el punto $x = 0$. Ya que el desarrollo del operador $F(x)$ en serie de potencias es único, toda serie de potencias de un operador analítico es su serie de Taylor.

23.1. Demostrar que el operador A: $l_2 \to l_2$, $Ax = (x_1, x_2^2, x_3^3, \ldots)$ para $x = (x_1, x_2, \ldots) \in l_2$ está definido para todos los x de l_2, es continuo en cada punto del espacio l_2 pero no es acotado sobre ninguna bola $\overline{S}_r(0)$ para $r > 1$.

23.2. Sean: X, un espacio de Banach de dimensión infinita; $\varepsilon \in \mathbf{R}$, $0 < \varepsilon < 1$; $x_n \in X$ $(n \in \mathbf{N})$ una sucesión tal, que $\| x_n \| = 1$ $(n \in \mathbf{N})$ y $\| x_k - x_n \| > \varepsilon$ para $k \neq n$ (la existencia de x_n se desprende del teorema 15.4). Consideremos una funcional f determinada por las siguientes condiciones:

1) $\langle x_k, f \rangle = k$ $(k \in \mathbf{N})$;

2) $\langle x, f \rangle = k - \frac{2k}{\varepsilon} \| x - x_k \|$ en la bola $\overline{S}_{\varepsilon/2}(x_k)$ $(k \in \mathbf{N})$;

3) fuera de las bolas $\overline{S}_{\varepsilon/2}(x_k)$ $\langle x, f \rangle = 0$. Demostrar que f es continua sobre X, pero no es acotada sobre la bola $\| x \| \leqslant 1 + \varepsilon/2$.

23.3. Sean X, Y, espacios de Banach de dimensión finita. Demostrar que cualquier operador continuo F: $X \to Y$ es totalmente continuo.

23.4. Sean: X, Y, Z, espacios de Banach; F: $X \to Y$, un operador continuo acotado sobre $D(F)$; A: $Y \to Z$, un operador totalmente continuo lineal. Demostrar que el operador AF es totalmente continuo.

23.5. Demostrar que todo operador totalmente continuo F: $X \to Y$ es acotado sobre cualquier conjunto acotado $M \subset D(F)$.

23.6. Sea una función $K(t, s, x)$ continua en un conjunto de variables en el dominio $0 \leqslant t, s \leqslant 1, |x| \leqslant r$. Consideremos el operador

$$F(x) = \int_0^1 K(t, s, x(s))\, ds,$$

definido sobre la bola $\overline{S}_r(0)$ del espacio $C[0, 1]$. Demostrar que el campo de valores $R(F)$ se sitúa en el espacio $C[0, 1]$ y que el operador F es totalmente continuo sobre la bola $\overline{S}_r(0)$.

23.7. Sea que una función $f(t, x)$ está definida para $0 \leqslant t \leqslant 1$, $-\infty < x < \infty$ y es continua en un conjunto de variables. Consideremos el operador

$$F(x) = f(t, x(t)),$$

definido sobre el espacio $C[0, 1]$. Demostrar que el campo de valores $R(F)$ está situado en el espacio $C[0, 1]$, que el operador es continuo y acotado sobre cada bola. ¿Es totalmente continuo el operador F?

23.8. Sea un operador $F: X \to Y$ diferenciable en el punto $x_0 \in X$. Demostrar que F es continuo en el punto x_0.

23.9. Sea un operador $F: X \to Y$ constante sobre un conjunto abierto $D \subset X$. Demostrar que $F'(x) = 0$ sobre D.

23.10. Sea $F(x)) = Ax$ donde, $A \in \mathcal{L}(X, Y)$. Demostrar que $F'(x) = A$.

23.11. Sean $F: X \to Y$ y $G: X \to Y$ operadores diferenciables en el punto x_0. Demostrar que el operador $\alpha F + \beta G$, donde α y β son escalares, es también diferenciable en el punto x_0 y que $(\alpha F + \beta G)'(x_0) = \alpha F'(x_0) + \beta G'(x_0)$.

23.12. Sean un operador $y = F(x)$, $F: X \to Y$ diferenciable en el punto x_0, y un operador $x = G(z)$, $G: Z \to X$ diferenciable en el punto z_0, además, $G(z_0) = x_0$. Demostrar que en un entorno del punto z_0 está definida la superposición

$$y = (F * G)(z) = F(G(z)),$$

que el operador $F * G$ es diferenciable en el punto z_0 y que

$$(F * G)'(z_0) = F'(x_0)\, G'(z_0).$$

23.13. Hallar las derivadas de Fréchet de los funcionale $F(x) = (x, x)$ y $G(x) = \| x \|$ en un espacio de Hilbert real.

23.14. Sea que una función $y = f(x)$, $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ está definida en el entorno de un punto x_0. Demostrar que su derivada ordinaria $f'(x_0)$ coincide con su derivada de Fréchet en el punto x_0.

23.15. Sea que una aplicación $F: E^2 \to E^2$ dada en coordenadas cartesianas por las fórmulas

$$u = u(x, y), \quad v = v(x, y),$$

está definida en el entorno del punto (x_0, y_0). Demostrar que si F es diferenciable en el punto (x_0, y_0), su derivada de Fréchet se define por la matriz de Jacobi

$$F'(x_0, y_0) = \left\| \begin{matrix} \frac{\partial u(x_0, y_0)}{\partial x} & \frac{\partial u(x_0, y_0)}{\partial y} \\ \frac{\partial v(x_0, y_0)}{\partial x} & \frac{\partial v(x_0, y_0)}{\partial y} \end{matrix} \right\|$$

23.16. Sea que la aplicación del plano complejo en sí $F: \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ se define por la fórmula $\omega = F(z)$, donde $z = x + iy$, $\omega = u + iv$. Demostrar que si F es diferenciable en un punto z_0 en el sentido de Fréchet, entonces en el punto $z_0 = x_0 + iy_0$ se cumplen las condiciones de Cauchy—Riemann

$$\frac{\partial u(x_0, y_0)}{\partial x} = \frac{\partial v(x_0, y_0)}{\partial y}, \quad \frac{\partial v(x_0, y_0)}{\partial x} = -\frac{\partial u(x_0, y_0)}{\partial y}$$

23.17. Sea que una aplicación $F: E^k \to E^n$, definida en las coordenadas cartesianas por las fórmulas

$y_i = f_i(x_1, x_2, \ldots, x_k)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, es diferenciable según Fréchet en el punto $x^0 = (x_1^0, \ldots, x_k^0)$. Demostrar que $F'(x^0)$ es dada por la matriz de Jacobi

$$F'(x^0) = \left\| \frac{\partial f_i(x^0)}{\partial x_j} \right\|, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \; j = 1, 2, \ldots, k.$$

23.18. Calcular la derivada de Fréchet de las siguientes aplicaciones:

a) $F: E^3 \to \mathbf{R}$, $y = x_1 + x_2^2 + x_3^3$ en el punto (1, 1, 1);

b) $F: \mathbf{R} \to E^3$, $y_1 = \operatorname{sen} \pi t$, $y_2 = \cos \pi t$, $y_3 = t$ en el punto $t = 1$;

c) $F: E^2 \to E^3$, $y_1 = e^{x_1} \operatorname{sen} \pi x_2$, $y_2 = e^{x_1} \cos \pi x_2$, $y_3 = e^{x_1}$ en el punto (1, 1);

d) $F: E^3 \to E^2$, $y_1 = \sqrt{4 - x_1^2 + x_2^2 - x_3^2}$, $y_2 = x_1 x_2 x_3$ en el punto (1, 1, 1).

23.19. Sea una aplicación $F: E^k \to E^n$ diferenciable en un punto x_0, siendo $x_0 = G(t_0)$ donde $G: E^m \to E^k$ es diferenciable en el punto t_0. Hallar $(F * G)'(t_0)$.

23.20. Sean las funciones $f(x, u)$ y $f_u(x, u)$ continuas en un conjunto de variables para $x \in [a, b]$, $-\infty < u < \infty$. Consideremos el operador F: $C[a, b] \to C[a, b]$, $F(u) = f(x, u(x))$. Demostrar que la derivada de F en un punto $u_0(x) \in C[a, b]$ y su diferencial en este punto para un incremento $h(x) \in C[a, b]$ equivalen a $F'(u_0) = f_u(x, u_0(x))$ y $dF(u_0, h) = f_u(x, u_0(x))\, h(x)$, respectivamente.

23.21. Hallar las derivadas de los siguientes operadores en el punto u_0:

a) $F(u) = \operatorname{sen} u(x)$ en el espacio $C[0, \pi]$, $u_0(x) = \cos x$;

b) $F(u) = \cos u(x)$ en el espacio $C[0, \pi]$, $u_0(x) = \operatorname{sen} x$;

c) $F(u) = u(x) - e^{xu(x)}$ en el espacio $C[0, 1]$, $u_0(x) \equiv 0$;

d) $F(u) = x^2 u(x) + \operatorname{sh} u(x)$ en el espacio $C[0, 1]$, $u_0(x) \equiv 0$.

¿En qué casos el operador $F'(u_0)$ es continuamente invertible?

23.22. Sea una función $f(x, s, u)$ continua en un conjunto de variables para $a \leqslant x \leqslant b$, $-\infty < u < \infty$ junto a la derivada parcial $f_u(x, s, u)$. Demostrar que el operador integral F: $C[a, b] \to C[a, b]$

$$F(u) = u(x) - \int_a^b f(x, s, u(s))\, ds$$

es diferenciable en todo punto $u_0(x) \in C[a, b]$ y

$$F'(u_0)\, h = h(x) - \int_a^b f_u(x, s, u_0(s))\, h(s)\, ds.$$

23.23. Hallar la derivada de Fréchet respecto a u en el punto $u_0 \equiv 0$ del operador integral F: $C[0, \pi] \to C[0, \pi]$ con el parámetro λ

$$F(u) = u(x) - \lambda \int_0^\pi \cos(x + u(s))\, ds.$$

Hallar todas las soluciones de la ecuación $F'(0)\, h = \cos x$.

23.24. Sea un operador F: $X \to Y$ continuamente diferenciable en cada punto del segmento $[x_1, x_2] \subset X$. De-

mostrar la fórmula de incrementos finitos

$$F(x_2) - F(x_1) = \int_0^1 F'(x_1 + \theta(x_2 - x_1))(x_2 - x_1)\, d\theta.$$

23.25. Demostrar que si un operador $F\colon X \to Y$ es continuamente diferenciable sobre el segmento $[x_1, x_2] \subset X$, entonces satisface la condición de Lipschitz $\| F(x_1) - F(x_2) \| \leqslant l \| x_1 - x_2 \|$ donde $l = \sup_{x \in [x_1, x_2]} \| F'(x) \|$.

23.26. Sea un operador $F\colon X \to Y$ continuamente diferenciable sobre el segmento $[x_1, x_2] \subset X$ y $F'(x) = 0$ sobre $[x_1, x_2]$. Demostrar que $F(x)$ es constante sobre $[x_1, x_2]$.

23.27. Sea un operador $F\colon X \to Y$ continuamente diferenciable sobre un conjunto convexo $\Omega \subset X$ y $F'(x) = 0$ sobre Ω. Demostrar que $F(x)$ es constante sobre Ω.

23.28. Sea un operador $F\colon X \to Y$ diferenciable sobre un conjunto convexo $\Omega \subset X$, además para cualesquiera $x_1, x_2 \in \Omega$ se cumple la desigualdad

$$\| F'(x_1) - F'(x_2) \| \leqslant l \| x_1 - x_2 \|,$$

es decir, F' satisface sobre Ω la condición de Lipschitz con una constante l. Demostrar que para cualesquiera $x_1, x_2 \in \Omega$ es válida la desigualdad

$$\| F(x_1) - F(x_2) - F'(x_2)(x_1 - x_2) \| \leqslant \frac{1}{2} l \| x_1 - x_2 \|^2.$$

23.29. Sean: un operador $F\colon X \to Y$ diferenciable sobre un conjunto convexo $\Omega \subset X$, y la derivada $F'(x)$ continua en el punto x_0. Demostrar que para cualquier $\varepsilon > 0$ existe un $\delta = \delta(\varepsilon, x_0) > 0$ tal, que

$$\| F(x) - F(y) - F'(x_0)(x - y) \| \leqslant \varepsilon \| x - y \|$$

para todos los $x, y \in \Omega \cap S_\delta(x_0)$.

23.30. Sea $f_n(x)$ $(n \in \mathbf{N})$ una sucesión de funciones diferenciables sobre $(-\infty, \infty)$. Sea también que las funciones $f_n(x)$ y sus primeras derivadas son equiacotadas y equicontinuas sobre cada segmento $[a, b]$. Sobre el espacio m de sucesiones acotadas definamos el operador F;
$F(x_1, x_2, \ldots, x_n \ldots) = (f_1(x_1), f_2(x_2), \ldots, f_n(x_n) \ldots)$
Demostrar que el campo de valores F está en el espacio m, que el operador F es diferenciable en el sentido de Fréchet y hallar el operador F'.

23.31. Hallar la derivada de Fréchet de la funcional

$$\varphi(x) = \int_a^b \Phi(t,\ x(t),\ x'(t))\, dt,$$

definida sobre el espacio de Banach $\mathring{C}^1[a, b]$ de funciones $x(t)$ que son continuamente diferenciables sobre $[a, b]$ y se anulan en los extremos de $[a, b]$. Se supone que la función $\Phi(x, y, z)$ es dos veces continuamente diferenciable.

23.32. Sea $F_h x^h$ un operador acotado k-potencial. Demostrar la validez de la fórmula del binomio de Newton

$$F_h(x+h)^h = \sum_{j=0}^{h} C_h^j F_h x^{h-j} h^j.$$

23.33. Empleando la fórmula del binomio de Newton del problema anterior, demostrar que todo operador acotado k-potencial $F_h x^h$ es diferenciable en el sentido de Fréchet en todo punto x y $(F_h x^h)' = kF_h x^{h-1}$,

$$d(F_h x^h;\ h) = kF_h x^{h-1} h.$$

23.34. Demostrar que todo operador acotado k-lineal es continuo en cualquier punto $x = (x_1, x_2, \ldots, x_k)$.

23.35. En el espacio c^m de columnas m-dimensionales

$$x_1 = \{x_j^{(1)}\}_{j=1}^m, \quad x_2 = \{x_j^{(2)}\}_{j=1}^m, \quad y = \{y_j\}_{j=1}^m$$

consideremos el operador $y = F(x_1, x_2)$, definido por las fórmulas

$$y_k = \sum_{i,\ j=1}^{m} a_{ij}^{(k)} x_j^{(1)} x_j^{(2)}, \qquad k = 1, 2, \ldots, m,\ a_{ij}^{(k)} \in \mathbf{R}.$$

Demostrar que $F(x_1, x_2)$ es un operador acotado bilineal. Hallar la estimación de su norma. ¿Cuál es el operador cuadrático correspondiente? ¿En qué caso es simétrico el operador $F(x_1, x_2)$?

23.36. En el espacio $C[0, 1]$ consideremos el operador integral cuadrático

$$(F_2 x^2)(t) = x(t) \int_0^1 K(t, s)\, x(s)\, ds,$$

donde la función $K(t, s)$ es continua en el cuadrado $0 \leqslant t, s \leqslant 1$.

a) Hallar el operador simétrico bilineal que le corresponde.

b) Calcular las derivadas $F_2 x^2$ de cualquier orden.

23.37. Sea $\overset{\circ}{C}{}^2 [0, l]$ un espacio de Banach de funciones $x(t)$ que son dos veces continuamente diferenciables y satisfacen las condiciones de frontera $x(0) = x(l) = 0$. Consideremos el operador F: $\overset{\circ}{C}{}^2 [0, l] \to C[0, l]$, $F(x) = x'' + f(t, x)$, donde la función $f(t, x)$ es continua junto a la derivada parcial $f_x(t, x)$ en un conjunto de variables en el rectángulo $0 < t < l$, $|x| < r$. Sea $x_0(t) \in \overset{\circ}{C}{}^2 [0, l]$ y $\|x_0\| < r$. Demostrar que

$$F'(x_0) z = z'' + f_x(t, x_0(t)) z.$$

23.38. Consideremos el operador diferencial no lineal

$$F(x) = \frac{d^2x}{dt^2} + \operatorname{sen} x(t)$$

que actúa desde el espacio $C^2 [0, 1]$ al espacio $C[0, 1]$.

a) Calcular $d^k F(x_0; h)$ $(k \in \mathbf{N})$ donde $x_0(t) = t$.

b) Desarrollar $F(x)$ en una serie de Taylor en el punto $x_0(t) = t$.

23.39. Sea $\sum_{k=0}^{\infty} F_k x^k$ una serie de potencias de X en Y. Demostrar que su campo de convergencia Ω es una C-estrella alrededor del punto 0, es decir, en cuanto $x \in \Omega$, $\lambda x \in \Omega$ para $|\lambda| \leqslant 1$.

23.40. Demostrar que el radio de convergencia ρ_u de una serie de potencias puede definirse según la fórmula de Cauchy—Hadamard

$$\rho_u = \frac{1}{\overline{\lim}_{n \to \infty} \sqrt[n]{\|F_n\|}}.$$

23.41. Sea $\rho_u > 0$. Demostrar que para cualquier $\rho \in (0, \rho_u)$, la serie de potencias converge absoluta y uniformemente en la bola $S_\rho(0)$.

23.42. Sean $X = E^2$, $Y = \mathbf{R}$. Hallar el campo de convergencia Ω y el radio de convergencia ρ_u para la serie de potencias $\sum_{k=0}^{\infty} (x_1 x_2)^k$.

23.43. Sea $\rho_u > 0$. Demostrar que el desarrollo de $F(x)$ en una serie de potencias es único.

23.44. Sea un núcleo $K(t, s)$ continuo en el cuadrado $a \leqslant t,\ s \leqslant b$. Consideremos el operador integral no lineal

$$F(x) = x(t) + \int_a^b K(t, s)\, e^{x(s)}\, ds.$$

que actúa en el espacio $C[a, b]$.

Demostrar que $F(x)$ se desarrolla en la serie de Taylor con $\rho_u = +\infty$ y escribir su desarrollo.

23.45. En el espacio $C[0, T]$ consideremos el operador

$$F(x) = \frac{x(t)}{1 - tx(t)}.$$

Demostrar que $F(x)$, definido sobre la bola $\| x \| < T^{-1}$, es analítico en el punto $x_0 \equiv 0$ y $\rho_u = T^{-1}$.

23.46. En el espacio C_α (véase el problema 7.31) consideremos el operador

$$F(x) = \frac{x(t)}{1 - tx(t)}.$$

Demostrar que $F(x)$ está definido sobre la bola $\| x \|_\alpha < e\alpha$, es analítico en el punto $x_0 \equiv 0$ y $\rho_u = e\alpha$.

§ 24. Principio de aplicaciones contraídas, proceso iterativo de Newton y principio del punto fijo de Schauder

Un operador no lineal $\Phi(x)$ que aplica en sí un conjunto Q situado en un espacio de Banach X se denomina *contraído* si existe un número $q \in (0, 1)$ tal, que para cualesquiera x, $y \in Q$ se cumple la desigualdad

$$\| \Phi(x) - \Phi(y) \| \leqslant q \| x - y \|.$$

El número q se llama *coeficiente de contracción*. Un punto x^* se denomina *punto fijo* del operador $\Phi(x)$, $\Phi: X \to X$ si $\Phi(x^*) = x^*$.

TEOREMA 24.1. *Sea $\Phi(x)$ un operador contraído sobre un conjunto cerrado Q. Entonces en Q existe y es único el punto fijo x^* del operador $\Phi(x)$. La sucesión de iteraciones*

$$x_n = \Phi(x_{n-1}), \quad n = 1, 2, \ldots,$$

donde $x_0 \in Q$ es arbitrario, se encuentra en Q y $x_n \to x^*$ para $n \to \infty$. Es válida la estimación de velocidad de convergencia

$$\| x_n - x^* \| \leqslant \frac{q^n}{1 - q} \| \Phi(x_0) - x_0 \|.$$

COROLARIO. *Sea que el operador* $\Phi(x)$ *aplica la bola cerrada* $\overline{S}_r(a)$ *en* X, *representa contracción sobre esta bola con el coeficiente de contracción* q, *con tal que* $\| \Phi(a) - a \| \leqslant (1-q)r$. *Entonces* Φ *aplica* $\overline{S}_r(a)$ *en sí y sobre* $Q = S_r(a)$ *es válida la afirmación del teorema 24.1.*

TEOREMA 24.2. *Sea que en la bola* $S_r(x_0)$ *se cumplen las siguientes suposiciones:*

1) *un operador* $F: X \to Y$ *es diferenciable y su derivada cumple la condición de Lipschitz, es decir, para cualesquiera* $x_1, x_2 \in S_r(x_0)$ *se verifica la desigualdad* $\| F'(x_1) - F'(x_2) \| \leqslant l \| x_1 - x_2 \|$;

2) *el operador* $F'(x)$ *es continuamente invertible y para cualquier* $x \in S_r(x_0)$ *se cumple la desigualdad* $\| [F'(x)]^{-1} \| \leqslant m$;

3) *un punto* x_0 *es tal, que* $\| F(x_0) \| \leqslant \eta$ (l, m, η *son constantes*). *Entonces, si* $q = \frac{1}{2} m^2 l \eta$, $r' = m\eta \sum_{k=0}^{\infty} q^{2^k - 1} < r$, *la ecuación* $F(x) = 0$ *tiene la solución* $x^* \in \overline{S}_{r'}(x_0)$ *hacia la cual converge el siguiente proceso iterativo de Newton:*

$$x_n = x_{n-1} - [F'(x_{n-1})]^{-1} F(x_{n-1}), \quad n \in \mathbf{N},$$

comenzado a partir de x_0. *La velocidad de convergencia de* x_n *hacia* x^* *puede estimarse partiendo de la igualdad*

$$\| x_n - x^* \| \leqslant m\eta \frac{q^{2^n - 1}}{1 - q^{2^n - 1}}.$$

TEOREMA 24.3. *Sea que se cumplen las suposiciones* 1), 2) 3) *del teorema 24.2. Si* $2m^2 l \eta < 1$ *y*

$$r' = \frac{1 - \sqrt{1 - 2m^2 l \eta}}{ml} < r,$$

entonces, en la bola $\overline{S}_{r'}(x_0)$, *la ecuación* $F(x) = 0$ *tiene la única solución* x^*, *a la cual converge el proceso modificado de Newton, comenzado desde* x_0,

$$x_n = x_{n-1} - [F'(x_0)]^{-1} F(x_{n-1}), \quad n \in \mathbf{N}$$

Es válida la estimación de la velocidad de convergencia

$$\| x_n - x^* \| \leqslant \frac{(1 - \sqrt{1 - 2m^2 l \eta})^n}{\sqrt{1 - 2m^2 l \eta}} m\eta.$$

TEOREMA 24.4. *Sea que un operador* $\Phi(x)$ *aplica en sí un conjunto convexo acotado cerrado* D *de un espacio de Banach* X. *Entonces, si* Φ *es totalmente continuo sobre* D, *posee un punto fijo sobre* D.

COROLARIO *Si un operador continuo* Φ *aplica un conjunto convexo cerrado* D *de un espacio de Banach* X *en un conjunto compacto* $D_0 \subset D$, *este operador tiene punto fijo sobre* D.

24.1. Demostrar que el operador Φ: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $\Phi(t) = t^3$ es contraído sobre la bola $\overline{S}_r(0) = \{t \in \mathbf{R}: \| t \| \leqslant r\}$ donde $r < 1/\sqrt{3}$, pero no es contraído en los entornos de los puntos fijos $t = 1$ y $t = -1$.

24.2. Sea que una función $x = f(t)$ está dada y es diferenciable sobre $[a, b]$ y aplica en sí este segmento, además.

$$\max_{[a, b]} |f'(t)| < 1.$$

Demostrar que la ecuación $f(t) = t$ tiene solución única sobre $[a, b]$.

24.3. Sea que una función $x = f(t)$ está definida y es diferenciable sobre todo el eje real y para cualquier $t \in \mathbf{R}$ se cumple la desigualdad:

a) $|f'(t)| \leqslant \lambda < 1$; b) $f'(t) | \geqslant \lambda > 1$. Demostrar que la ecuación $f(t) = t$ tiene solución única.

24.4. Consideremos la ecuación $2te^t = 1$ $(t \in \mathbf{R})$.

a) Demostrar que esta ecuación tiene solución única que está en el intervalo $(0, 1)$.

b) Reducir la ecuación a la forma conveniente para componer iteraciones y determinar el número de iteraciones necesarias para que la solución aproximada se diferencie de la exacta en no más de 0,01, si en calidad de aproximación inicial se toma $t_0 = 0$.

c) Elaborar y realizar en un ordenador un programa de búsqueda de una solución aproximada, imprimiendo el resultado de cada iteración.

d) Resolver esta misma ecuación empleando el programa estandar y comparar los resultados.

24.5. Demostrar que toda aplicación continua en sí de un segmento tiene punto fijo.

24.6. Sea dada la ecuación $F(t) = 0$ donde $y = F(t)$ es una función continuamente diferenciable sobre $[a, b]$. Consideremos la ecuación equivalente $t - \lambda F(t) = t$ donde $\lambda \in \mathbf{R}$. ¿Se puede escoger siempre el valor del parámetro λ de modo que el operador $t \to t - \lambda F(t)$ sea contraido sobre $[a, b]$?

24.7. Consideremos la ecuación $t^5 + t + 1 = 0$ $(t \in \mathbf{R})$.

a) Demostrar que esta ecuación tiene raíz real única y hallar el segmento donde se encuentra la misma

b) Reducir la ecuación a una forma que permite resolverla por el método iterativo.

c) Hallar el número de iteraciones necesarias para determinar la raíz con error no superior a 0,01.

d) Elaborar y realizar en un ordenador un programa de búsqueda de la solución aproximada, imprimiendo el resultado de cada iteración.

e) Resolver esta misma ecuación empleando el programa estandar.

24.8. Durante el movimiento de un planeta alrededor del Sol por una órbita elíptica, en un momento de tiempo t calculado a partir del instante de paso del punto de perihelio, su posición se determina por la ecuación de Képler

$$E - e \operatorname{sen} E = 2\pi \frac{t}{T},$$

donde E es la anomalia excéntrica que determina la posición del planeta, e la excentricidad de la órbita ($0 < e < 1$) y T el período orbital.

a) Demostrar que para cualquier t la ecuación de Képler tiene solución única que determina la función $E(t) \in C[0, T]$.

b) Tomando $e = 0{,}5$, $t \in [0, T]$ determinar el número de iteraciones necesarias para hallar $E(t)$ con error que no supere 0,01, si en calidad de aproximación nula se toma $E_0 = 0$.

c) Elaborar un programa de computación para la búsqueda de la solución aproximada y realizarlo imprimiendo el resultado de cada iteración. Trazar la gráfica de $E(t)$ sobre $[0, T]$ para $e = 0{,}5$, tomando los valores de t con un paso $T/12$.

d) Elaborar un programa para ordenador, que permite determinar la dependencia de $E(T/4)$ respecto a e, tomando en cuenta que con el cambio de e varía también el número de iteraciones necesarias para llegar a un error que no supere 0,01. Empleando este programa, trazar la gráfica de $E(T/4)$ para $e \in [0{,}25, 0{,}75]$, con paso 0,05.

24.9. Consideremos la ecuación $x(t) = t + \varepsilon x(t^k)$, donde $0 < \varepsilon < 1$, $k > 1$.

a) Demostrar que esta ecuación tiene la solución única $x(t) \in C[0, 1]$.

b) Haciendo $x_0 = 0$, $\varepsilon = 0{,}5$ determinar el número de iteraciones necesarias para hallar $x(t)$ sobre $[0, 1]$ con un error que no supere 0,01.

c) Elaborar un programa para ordenador y emplearlo para trazar la gráfica de $x(t)$ sobre $[0, 1]$ tomando los valores de t con el paso 0,1 para $\varepsilon = 0{,}5$ y k que cambia de 2 a 7 con el paso 1.

24.10. Demostrar que para $0 \leqslant a \leqslant 1$ las iteraciones

$$x_{n+1} = x_n - \frac{1}{2}(x_n^2 - a), \quad x_0 = 0, \ n \in \mathbf{N},$$

convergen hacia $\sqrt{a}$.

24.11. Demostrar que la sucesión de fracciones encadenadas

$$2;\ 2+\frac{1}{2};\ 2+\cfrac{1}{2+\frac{1}{2}};\ 2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\frac{1}{2}}},\ \ldots$$

tiene límite y hallarlo.

24.12. Demostrar que en el espacio E^n una aplicación lineal $A: E^n \to E^n$ con la matriz $\| a_{ij} \|$ $(i, j = 1, 2, \ldots, n)$ será contraída si

$$\sum_{i,\, j=1}^{n} |a_{ij}|^2 < 1.$$

24.13. Demostrar que en el espacio c^n una aplicación lineal $A: c^n \to c^n$ con la matriz $\| a_{ij} \|$ $(i, j = 1, 2, \ldots, n)$ será contraída si

$$\max_{1 \leqslant i \leqslant n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| < 1.$$

24.14. Demostrar que en el espacio l^n una aplicación lineal $A: l^n \to l^n$ con la matriz $\| a_{ij} \|$ $(i, j = 1, 2, \ldots, n)$ será contraída si

$$\max_{1 \leqslant j \leqslant n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}| < 1.$$

24.15. Transformar los siguientes sistemas de ecuaciones algebraicas lineales, de modo que se los pueda resolver por el método iterativo:

a) $2x + y = 2$; $x - 3y = 1$; b) $3x + y = 4$, $x + 2y = 3$.

Investigar el carácter de aproximación de iteraciones a la solución exacta.

24.16. En el espacio E^n, consideremos un sistema de ecuaciones algebraicas lineales $Cx = b$ donde $x,\ b \in E^n$, $C = \| c_{ij} \|$ $(i,\ j = 1,\ 2,\ \ldots,\ n)$. Consideremos el sistema equivalente $x = (\lambda C + I)\, x - \lambda b$ donde $\lambda \in \mathbf{R}$, I es una matriz unidad. Hagamos $A = \lambda C + I$ y compongamos las iteraciones $x_n = Ax_{n-1} - \lambda b$, $n \in N$, donde $x_0 \in E^n$ es arbitrario. Supongamos que se cumple la siguiente condición:

$$\Big(\sum_{i=1}^{n} c_{ij}\Big)^2 > (n-1) \sum_{\substack{i,\ j=1 \\ i \neq j}}^{n} c_{ij}^2.$$

Demostrar que existe un $\lambda \in \mathbf{R}$, para el cual el proceso iterativo converge hacia la solución del sistema inicial.

24.17. Consideremos el operador A: $C\,[0,\ 1] \to C\,[0,\ 1]$

$$Ax(t) = \lambda \int_0^t x(\tau)\, d\tau + 1.$$

a) Demostrar que para $|\lambda| < 1$ este operador es contraído en el espacio $C\,[0,\ 1]$.

b) Hallar un punto fijo de este operador para $\lambda = 0{,}5$.

c) Tomando como aproximación inicial $x_0 \equiv 0$, componer iteraciones y comprobar que son sumas parciales de la serie de Taylor para el punto fijo.

d) Hallar la estimación del error que aparece en el n-ésimo paso del proceso iterativo partiendo de la estimación del término residual en la fórmula de Taylor y de la estimación en el teorema 24.1.

e) ¿Tiene puntos fijos para $|\lambda| \geqslant 1$ el operador que consideramos?

24.18. Sea Φ: $X \to X$ un operador continuo que transforma en sí el espacio de Banach, y tal que alguna iteración suya es operador contraído sobre X. Demostrar que el operador Φ tiene punto fijo en X.

24.19. Poner un ejemplo de un operador Φ: $X \to X$ que transforma en sí un espacio de Banach X, satisface la condición $\| \Phi(x) - \Phi(y) \| < \| x - y \|$ para $x,\ y \in X$ $(x \neq y)$ y no tiene punto fijo en X.

24.20. Sean Q un conjunto bicompacto en un espacio de Banach X, Φ: $Q \to Q$ un operador que satisface la condición $\| \Phi(x) - \Phi(y) \| < \| x - y \|$ para $x \neq y$. Demostrar que el operador Φ tiene un punto fijo único en Q y las iteraciones $x_n = \Phi(x_{n-1})$ $(n \in \mathbf{N})$ convergen hacia ese punto para cualquier $x_0 \in Q$. ¿Es contraído el operador Φ?

24.21. Consideremos la ecuación

$$x(s) - \lambda \int_a^b K(s, t)\, x(t)\, dt = f(s)$$

o $(I - \lambda A)\, x = f$, donde $\lambda \in \mathbf{C}$, $f(s) \in C[a, b]$, $K(s, t)$ es continua para $a \leqslant s,\ t \leqslant b$, $M = \max_{a \leqslant s,\ t \leqslant b} |K(s, t)|$.

a) Empleando el teorema 24.1 demostrar que para $|\lambda| < 1/(M(b-a))$, la ecuación dada tiene la solución $x(s)$ $C[a, b]$ que, además, es única.

b) Demostrar que para $|\lambda| < 1/(M(b-a))$

$$x = (I - \lambda A)^{-1} f = (I + \lambda A + \lambda^2 A^2 + \ldots) f$$

y que A^n es un operador integral con núcleo

$$K_n(s, t) = \int_a^b K(s, \tau)\, K_{n-1}(\tau, t)\, d\tau, \quad n = 2, 3, \ldots,$$

$$K_1(\tau, t) = K(\tau, t).$$

c) Demostrar que la *serie de Neumann*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda^{n-1} K_n(s, t)$$

converge uniformemente en el círculo $|\lambda| < 1/(M(b-a))$ y su suma $R(s, t, \lambda)$ (la resolvente del núcleo) es analítica respecto a λ en este círculo.

d) Demostrar que para $|\lambda| < 1/(M(b-a))$, la solución de la ecuación dada tiene la forma

$$x(s) = f(s) + \lambda \int_a^b R(s, t, \lambda)\, f(t)\, dt.$$

24.22. Demostrar que para $|\lambda| < 1/(M(b-a))$ la resolvente $R(s, t, \lambda)$ del núcleo continuo $K(s, t)$ satisface las ecuaciones:

a) $R(s, t, \lambda) = \lambda \int_a^b K(s, \tau)\, R(\tau, t, \lambda)\, d\tau + K(s, t)$;

b) $R(s, t, \lambda) = \lambda \int_a^b K(\tau, t)\, R(s, \tau, \lambda)\, d\tau + K(s, t)$;

c) $\dfrac{\partial R(s, t, \lambda)}{\partial \lambda} = \int_a^b R(s, \tau, \lambda)\, R(\tau, t, \lambda)\, d\tau$.

24.23. Consideremos la ecuación

$$x(s) - \lambda \int_0^1 stx(t)\,dt = f(s),$$

donde $f(s) \in C[0, 1]$.

a) Demostrar que la serie de Neumann para la ecuación dada converge para $|\lambda| < 3$.

b) Hallar los núcleos iterados $K_n(s, t)$, sumar la serie de Neumann y escribir la solución de la ecuación dada.

c) ¿Tiene soluciones para $|\lambda| > 1$ la ecuación dada?

24.24. Demostrar que la serie de Neumann para la ecuación de Volterra de segunda especie con núcleo continuo, converge para todo valor del parámetro λ, y, por consiguiente, la solución de esta ecuación existe para cualquier segundo miembro continuo.

24.25. Demostrar que la ecuación de Volterra de segunda especie no tiene números característicos.

24.26. Denominaremos *no estirante* sobre un conjunto convexo $D \subset X$ a un operador F: $X \to Y$-si para cualesquiera $x_1, x_2 \in D$ se cumple la desigualdad $\| F(x_1) - F(x_2) \| \leqslant \| x_1 - x_2 \|$. Demostrar que el operador $F(x)$, continuamente diferenciable sobre un conjunto convexo D, es no estirante si, y sólo si,

$$\sup_{x \in D} \| F'(x) \| \leqslant 1.$$

24.27. Sea que un operador $\Phi(x)$ aplica en sí un conjunto convexo cerrado $D \subset X$ y es continuamente diferenciable sobre D. Demostrar que el operador $\Phi(x)$ es contraído sobre D si, y sólo si,

$$\sup_{x \in D} \| \Phi'(x) \| = q < 1.$$

24.28. Sea que un operador $\Phi(x)$ aplica en sí un conjunto cerrado $Q \subset X$ y, para un m natural dado, el operador

$$\Phi^m(x) = \underbrace{\Phi[\Phi[\ldots[\Phi(x)]\ldots]]}_{m \text{ veces}}$$

es contraído sobre Q. Demostrar que en Q existe un único punto fijo del operador $\Phi(x)$ y que las iteraciones $x_n = \Phi(x_{n-1})$ $(n \in N)$ convergen hacia este punto para cualquier $x_0 \in Q$.

24.29. Sea $y = f(x)$ una función dos veces diferenciable sobre $[a, b]$, $f(a) < 0$, $f(b) > 0$, además, $f'(x) \geqslant m > 0$, $f''(x) \geqslant 0$ sobre $[a, b]$.

a) Demostrar que las aproximaciones sucesivas x_n del proceso iterativo de Newton, iniciadas a partir de $x_0 = b$, no crecen, son acotadas inferiormente y convergen hacia un punto x^* que es la raíz de la ecuación $f(x) = 0$.

b) Formular las afirmaciones análogas en los casos en que:

1) $f'(x) \geqslant m > 0$, $f''(x) \leqslant 0$ sobre $[a, b]$;

2) $f'(x) \leqslant -m < 0$, $f''(x) \geqslant 0$ sobre $[a, b]$;

3) $f'(x) \leqslant -m < 0$, $f''(x) \leqslant 0$ sobre $[a, b]$.

24.30. En las condiciones del problema anterior consideremos las aproximaciones sucesivas del método de cuerdas

$$\tilde{x}_0 = a, \quad \tilde{x}_n = \tilde{x}_{n-1} - \frac{(b - \tilde{x}_{n-1}) f(\tilde{x}_n)}{f(b) - f(\tilde{x}_n)}, \quad n \in \mathbf{N}.$$

Demostrar que:

a) la sucesión $\tilde{x}_n$ no decrece, está acotada superiormente y converge hacia x^*;

b) es válida la desigualdad $\tilde{x}_n < x^* < x_n$ $(n \in \mathbf{N})$;

c) son válidas las estimaciones $|x_n - x^*| \leqslant \frac{f(x_n)}{m}$, $x^* - \tilde{x}_n \leqslant \frac{|f(\tilde{x}_n)|}{m}$.

24.31. Sea que para las condiciones del problema 24.29 a) y para $x_0 < b$ se cumple la desigualdad $|f(x_0)| < \frac{2}{m^2 l}$, donde $l = \max\limits_{[a, b]} f''(x)$. Demostrar que para la velocidad de convergencia x_n hacia x^* es válida la estimación dada en el teorema 24.2.

24.32. Construir fórmulas de aproximaciones sucesivas para los procesos iterativo e iterativo modificado de Newton cuando $X = \mathbf{R}$ y $X = E^n$.

24.33. En el espacio l_2 consideremos un operador $F(x)$ definido sobre la bola $\bar{S}_1(0)$ y que transforma el elemento $x = (x_1, x_2, \ldots) \in l_2$ en $F(x) = (\sqrt{1 - \|x\|^2}, x_1, x_2, \ldots)$. Demostrar que $F(x)$:

a) transforma en sí la bola $\bar{S}_1(0)$;

b) es continuo sobre la bola $\bar{S}_1(0)$;

c) no tiene puntos fijos sobre la bola $\bar{S}_1(0)$;

d) no es totalmente continuo.

24.34. Sean: $f(t, x)$, una función continua en un conjunto de variables en el dominio $|t - t_0| \leqslant a$, $|x - x_0| \leqslant b$; M, el máximo de $|f(t, x)|$ en este dominio; $h = \min(a, b/M)$. Consideremos el problema de Cauchy para la ecuación diferencial ordinaria de primer orden

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x), \quad x(t_0) = x_0.$$

a) Demostrar que este problema es equivalente a la ecuación integral

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, x(\tau))\, d\tau.$$

b) Demostrar que el operador

$$F(x) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, x(\tau))\, d\tau,$$

definido sobre la bola $\|x - x_0\| \leqslant b$ en el espacio $C \times [t_0 - h, t_0 + h]$, transforma en sí esta bola y es totalmente continuo sobre ella.

c) Demostrar que el problema considerado de Cauchy tiene al menos una solución sobre el segmento $[t_0 - h, t_0 + h]$.

d) Poner un ejemplo de una función continua $f(t, x)$ y el punto (t_0, x_0) tales, que el problema considerado de Cauchy tiene más de una solución sobre un segmento que contiene el punto t_0.

24.35. En el espacio $C^3[0, 1]$ consideremos el siguiente problema de contorno para la ecuación diferencial casi lineal ordinaria de tercer orden (el problema modelo de la teoría de la capa de frontera):

$$x''' + \chi x'' = 0, \quad 0 < t < 1,$$
$$x(0) = a, \; x'(0) = b, \quad x(1) = c.$$

a) Demostrar que este problema es equivalente a la siguiente ecuación integral no lineal en el espacio $C[0, 1]$:

$$x(t) = a + bt + (c - a - b)\, \frac{\int_0^t \int_0^\tau \exp\left\{-\int_0^\sigma x(s)\, ds\right\} d\sigma\, d\tau}{\int_0^1 \int_0^\tau \exp\left\{-\int_0^\sigma x(s)\, ds\right\} d\sigma\, d\tau};$$

b) Sea que al menos uno de los números a, b, $c - a - b$ es distinto de cero. Demostrar que un operador $\Phi(x)$, dado por el segundo miembro de la ecuación integral, aplica en sí la bola $\overline{S}_r(0)$ de radio $r = |a| + |b| + |c - a - b|$.

c) Empleando el teorema 15.3 demostrar que $\Phi(x)$ es totalmente continuo en esta bola.

Así, en virtud del principio de Schauder, se establece la existencia de la solución del problema de contorno inicial.

24.36. Sean: $K(t, s) \not\equiv 0$, una función continua para $a \leqslant t, s \leqslant b$; $y(t) \not\equiv 0$, una función continua sobre $[a, b]$; además se cumple la desigualdad

$$\| K \| n \left(\| y \| \frac{n}{n-1} \right)^{n-1} < 1,$$

donde

$$\| K \| = \max_{[a, b]} \int_a^b | K(t, s) | ds, \quad \| y \| = \max_{[a, b]} | y(t) |,$$

y $n > 1$ es natural. Sean luego $r_* < r^*$ soluciones no nulas de la ecuación $\| K \| r^n + \| y \| = r$. En el espacio $C[a, b]$ consideremos el operador integral

$$\Phi(x) = \int_a^b K(t, s) x^n(s) ds + y(t).$$

a) Empleando el principio de aplicaciones contraídas demostrar que en la bola $\| x \| \leqslant r_*$ el operador Φ tiene un único punto fijo.

b) Empleando el principio de Schauder demostrar que en la bola $\| x \| \leqslant r^*$ el operador Φ tiene por lo menos un punto fijo.

§ 25. Operadores implícitos

Sean: X, Y, Λ, espacios de Banach; $X + \Lambda$, la suma directa de los espacios X y Λ. La ecuación $F(x), \lambda = 0$, donde F: $X + \Lambda \to Y$, puede determinar soluciones $x = x(\lambda)$, cada una de las cuales se llama *operador implícito (función implícita)* determinado por la ecuación inicial.

TEOREMA 25.1. *Sea un operador $F(x, \lambda)$ continuamente diferenciable en un entorno del punto (x_0, λ_0). Sea luego $F(x_0, \lambda_0) = 0$ y el operador $F_x(x_0, \lambda_0)$ continuamente invertible. Entonces existen los números $\rho > 0$ y $r > 0$ tales, que*

para todo $\lambda \in S_\rho(\lambda_0)$ *la ecuación* $F(x, \lambda) = 0$ *tiene la solución única* $x = x(\lambda)$ *en la bola* $S_r(x_0)$. *Con esto,* $x(\lambda_0) = x_0$ *la función implícita* $x(\lambda)$ *es diferenciable en* $S_r(x_0)$ *y*

$$x'(\lambda) = -F_x'^{-1}(x(\lambda), \lambda) \cdot F_\lambda(x(\lambda), \lambda).$$

En particular, $x'(\lambda_0) = -F_x'^{-1}(x_0, \lambda_0) \cdot F_\lambda(x_0, \lambda_0)$.

TEOREMA 25.2. *Si en las condiciones del teorema 25.1 el operador* $F(x, \lambda)$ *es analítico en el punto* (x_0, λ_0), *el operador implícito* $x(\lambda)$ *resulta también analítico en el punto* λ_0 *o sea, en una bola* $\|\lambda - \lambda_0\| < \rho$ $(\rho > 0)$ *se representa por la serie absoluta y uniformemente convergente*

$$x(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} x_k (\lambda - \lambda_0)^k.$$

25.1. Verificar que para $x, \lambda \in \mathbf{R}$ la ecuación:

a) $x^2 + \lambda^2 + 1 = 0$ no determina ninguna función implícita;

b) $x^2 + \lambda^2 = 0$ determina la única función implícita $x \equiv 0$ definida solamente para $\lambda = 0$;

c) $x - \lambda^2 = 0$ determina la única función implícita definida para cualquier $\lambda \in \mathbf{R}$;

d) $x^2 + \lambda^2 = 1$ determina dos funciones implícitas continuas para $\lambda \in [-1, 1]$;

e) $x^2 - \lambda^2 = 0$ determina sobre R dos funciones implícitas diferenciables y cuatro funciones continuas.

25.2. Demostrar que en los puntos d) y e) del problema 25.1 existe un conjunto infinito de funciones implícitas discontinuas.

25.3. Hallar los números ρ y r, de los cuales se trata en la formulación del teorema 25.1, en el punto d) del problema 25.1 cuando $x_0^2 + \lambda_0^2 = 1$ $(x_0 \neq 0)$. ¿Es aplicable este teorema en los puntos $x = 0$, $\lambda = \pm 1$?

25.4. Hallar números ρ y r de los cuales se trata en la formulación del teorema 25.1, en el punto e) del problema 25.1 cuando $x_0^2 = \lambda_0^2$ $(x_0 \neq 0)$. ¿Es aplicable este teorema en el punto (0, 0)?

25.5. Formular los teoremas 25.1 y 25.2 sobre las funciones implícitas para los casos:

a) $X = \Lambda = Y = \mathbf{R}$;

b) $X = Y = E^h$, $\Lambda = E^n$.

25.6. Sea $X = Y = C[a, b]$, $\Lambda = \mathbf{R}$. Reformular los teoremas 25.1 y 25.2 sobre operadores implícitos para el ope-

rador integral:

a) $F(x, \lambda) = x(t) - \int_a^b K(t, s) f(s, x(s), \lambda)\, ds$;

b) $F(x, \lambda) = x(t) - \int_a^b K(t, s, x(s), \lambda)\, ds$;

c) $F(x, \lambda) = \Phi(x(t), t, \lambda) - \int_a^b \psi(t, s, x(t), x(s), \lambda)\, ds$.

25.7. Demostrar que la ecuación integral

$$x(t) = \frac{\lambda}{\pi} \int_0^{\pi} \operatorname{sen} t\, [x(s) \operatorname{sen} s + x^2(s)]\, ds$$

tiene la solución $x_0(t) = \operatorname{sen} t$ para $\lambda = \lambda_0 = 1$. Hallar una solución, continua respecto a (t, λ), de la ecuación $x(t, \lambda)$ tal, que $x(t, 1) = \operatorname{sen} t$.

25.8. Hallar todas las funciones implícitas determinadas por la ecuación integral del problema 25.7.

25.9. Consideremos el problema de contorno para la ecuación diferencial ordinaria no lineal de segundo orden con el parámetro pequeño

$$x'' + f(t, x, x', \varepsilon) = 0,\ 0 \leqslant t \leqslant l,\ x(0) = x(l) = 0.$$

Supongamos que la función $f(t, x, y, \varepsilon)$ es suficientemente suave en un conjunto de sus variables para

$$t \in [0, l],\quad -\infty < x, y < +\infty,\ |\varepsilon| \leqslant \varepsilon_0.$$

En adelante, sea que para $\varepsilon = 0$ este problema tiene solución $x_0(t)$ con tal que el problema linearizada

$$z'' + f_y(t, x_0(t), x_0'(t), 0)\, z' + f_x(t, x_0(t), x_0'(t), 0)\, z = 0$$

tiene solamente solución trivial $z = 0$. Tomando

$$X = C^2[0, l],\quad Y = C[0, l],\quad \Lambda = \mathbf{R},$$
$$F(x, \varepsilon) = x'' + f(t, x, x', \varepsilon),$$

formular los teoremas 25.1 y 25.2 de funciones implícitas para este caso.

25.10. Hallar con precisión de hasta $O(\varepsilon^2)$ solución del problema de contorno

$$x'' + \operatorname{sen} x = \varepsilon \operatorname{sen} \pi t,\quad x(0) = x(1) = 0.$$

25.11. Sea la función $\varphi(x)$, $\varphi: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ analítica en un entorno S del punto a_0. Consideremos la ecuación $x = a + \varepsilon\varphi(x)$ con parámetros $a \in S$ y $\varepsilon \in (-\varepsilon_0, \varepsilon_0)$. Demostrar que:

a) existen los números $\rho > 0$ y $r > 0$ tales, que para todos los (a, ε) que satisfacen las condiciones $|a - a_0| < \rho$, $|\varepsilon| < \rho$, la ecuación considerada tiene la solución única $x = x(a, \varepsilon)$ en el intervalo $|x - a_0| < r$; esta solución es analítica respecto a a, ε y satisface la condición $x(a_0, 0) = a_0$;

b) para las derivadas de $x(a, \varepsilon)$ respecto a ε son válidas las fórmulas de Laplace

$$\frac{\partial^k x}{\partial \varepsilon^k} = \frac{\partial^{k-1}}{\partial a^{k-1}}\left[\varphi^k(x)\frac{\partial x}{\partial a}\right], \quad k \in \mathbf{N},$$

de los cuales se desprende, en particular, que

$$\left.\frac{\partial^k x}{\partial \varepsilon^k}\right|_{\varepsilon=0} = \frac{\partial^{k-1}}{\partial a^{k-1}}[\varphi^k(a)];$$

c) para $x(a, \varepsilon)$ es válida la fórmula de Lagrange

$$x(a, \varepsilon) = a + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varepsilon^k}{k!}\frac{d^{k-1}}{da^{k-1}}[\varphi^k(a)].$$

25.12. Empleando la fórmula de Lagrange del problema 25.11, demostrar que la solución analítica para $\varepsilon = 0$ de la ecuación de Képler (véase el ejercicio 24.8)

$$E - \varepsilon \operatorname{sen} E = M, \quad 0 \leqslant \varepsilon \leqslant 1,$$

se determina por la serie

$$E = M + \varepsilon \operatorname{sen} M + \frac{\varepsilon^2 d}{2!\, dM}\operatorname{sen}^2 M + \ldots$$
$$\ldots + \frac{\varepsilon^n}{n!}\frac{d^{n-1}}{dM^{n-1}}\operatorname{sen}^n M + \ldots$$

25.13. Formular y resolver el problema 25.11 para el caso cuando φ es aplicación del plano complejo y ε y a son parámetros complejos.

25.14. Consideremos la ecuación $f(x) = \varepsilon$ donde la función $f(x)$ es analítica en el punto $x = 0$, $f(0) = 0$, $f'(0) \neq 0$. En el entorno del punto $\varepsilon = 0$ esta ecuación determina la única función inversa $x = x(\varepsilon)$, además, $x(0) = 0$ y esta función es analítica en el punto $\varepsilon = 0$. Sea

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k x^k, \quad \psi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k x^{k-1}.$$

Demostrar que la función inversa se determina por la serie de Lagrange

$$x(\varepsilon) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varepsilon^k}{k!} \frac{d^{k-1}}{dx^{k-1}} \left[\frac{1}{\psi(x)} \right]^k \Big|_{x=0}.$$

25.15. Sean una función $F(x, \lambda)$, $F: E^2 \to \mathbf{R}$ y su derivada parcial $F_x(x, \lambda)$, continuas en la franja $a \leqslant \lambda \leqslant b$, $-\infty < x < +\infty$, y en esta franja $0 < m \leqslant F_x(x, \lambda) \leqslant M$ donde $0 < m \leqslant M$ son constantes que no dependen de x y λ. Demostrar que la ecuación $F(x, \lambda) = 0$ determina la única función implícita $x = x(\lambda)$ en el espacio $C[a, b]$.

25.16. Sean un operador $F(x, \lambda)$, $F: E^k + E^n \to E^k$ y su derivada parcial $F_x(x, \lambda)$, continuos en el cilindro $x \in E^k$, $\lambda \in \overline{G} \subset E^n$ donde $\overline{G}$ es un dominio acotado cerrado. Sea que para los puntos de este cilindro se cumple la desigualdad

$$m \| h \|^2 \leqslant (F_x(x, \lambda) h, h) \leqslant M \| h^2 \|,$$

donde $0 < m < M$ son constantes que no dependen de x y λ. Demostrar que la ecuación $F(x, \lambda) = 0$ determina el único operador implícito $x = x(\lambda)$, continuo sobre $\overline{G}$.

25.17. Consideremos el problema de Cauchy para la ecuación diferencial ordinaria de primer orden

$$\frac{dx}{dt} + \alpha x = \varphi(x), \quad 0 < t < +\infty, \quad x|_{t=0} = a,$$

donde $\alpha > 0$ y la función $\varphi(x)$ es continuamente diferenciable en un entorno S del punto $x = 0$, $a \in S$, $\varphi(0) = \varphi'(0) = 0$. Demostrar que este problema es equivalente a la ecuación integral

$$x(t) = ae^{-\alpha t} + \int_0^t e^{-\alpha(t-s)} \varphi(x(s))\, ds,$$

es decir, toda solución del problema de Cauchy es solución de la ecuación integral y viceversa, toda solución continua de la ecuación integral es continuamente diferenciable sobre el semieje, satisface la condición inicial y es solución de la ecuación diferencial.

25.18. Escribamos la ecuación integral del problema anterior en la forma $x = \Phi(a, x)$. Empleando el teorema sobre operadores implícitos demostrar que para $|a|$ suficientemente pequeños la ecuación integral tiene una única solución pequeña $x(t, a) \to 0$ cuando $a \to 0$ en el espacio C_α (véase el problema 7.31). Formular la afirmación obtenida para el problema de Cauchy de 25.17.

Capítulo 7

Aproximaciones discretas de soluciones de ecuaciones operatorias

§ 26. Esquemas aproximados y de diferencias

Para resolver aproximadamente la ecuación $Ax = y$ con un operador lineal A, que actúa del campo de definición $D(A) \subset X$ en el campo de valores $R(A) \subset Y$ (X, Y son espacios de Banach), y el segundo miembro $y \in Y$ se considera una sucesión de ecuaciones aproximadas $\overline{A}_n \overline{x}_n = \overline{y}_n$ ($n \in \mathbf{N}$) llamada *esquema aproximado* con operadores lineales $\overline{A}_n$ que actúan de $D(\overline{A}_n) \subset X_n$ en $R(\overline{A}_n) \subset \overline{Y}_n$ e $\overline{y}_n \in \overline{Y}_n$ ($\overline{X}_n$ e $\overline{Y}_n$ son espacios de Banach). La relación entre los espacios X y $\overline{X}_n$ (Y e $\overline{Y}_n$) se realiza mediante los operadores lineales $T_n \in \mathcal{L}(X, \overline{X}_n)$, ($T_n' \in \mathcal{L}(Y, \overline{Y}_n$ (respectivamente)) tales, que $T_n X = \overline{X}_n$ ($T_n' Y = \overline{Y}_n$). Estos se llaman *operadores de contracción*.

Una sucesión $\overline{x}_n \in \overline{X}_n$ ($n \in \mathbf{N}$) se denomina *T-convergente* hacia el elemento $x \in X$ (se denota $\overline{x}_n \xrightarrow[T]{} x$, $n \to \infty$) si $\| \overline{x}_n - T_n x \|_{\overline{X}_n} \to 0$, cuando $n \to \infty$. Si $\overline{x}_n \xrightarrow[T]{} x$ para $n \to \infty$, se dice que $\overline{x}_n$ aproxima x. De modo análogo se define la *T — convergencia* de la sucesión $\overline{y}_n \in \overline{Y}_n$ hacia un elemento $y \in Y$. Si para cierto k natural es válida la desigualdad

$$\| \overline{x}_n - T_n x \|_{\overline{X}_n} \leqslant c(x)/n^k,$$

se dice que $\overline{x}_n$ *aproxima x con grado k*. El grado de aproximación de un elemento $y \in Y$ se define análogamente por la sucesión $\overline{y}_n \in \overline{Y}_n$.

Se dice que la condición de aproximación se cumple, contando con la solución x^* de una ecuación inicial dada, si $T_n x^* \in D(\overline{A}_n)$ y cuando $n \to \infty$

$$\| \overline{A}_n T_n x^* - \overline{y}_n \|_{\overline{Y}_n} \to 0.$$

En este caso se dice también que la ecuación dada *se aproxima* sobre x^* por el esquema aproximado. Si, además, existen una constante $c > 0$ y un k natural tales, que para $n \in N$ se cumple la desigualdad

$$\| \bar{A}_n T_n x^* - \bar{y}_n \|_{\bar{Y}_n} \leqslant c/n^k,$$

entonces se dice que el esquema aproximado aproxima la ecuación inicial *con grado k.*

Si existe una constante $\gamma > 0$ tal, que para cualesquiera $\bar{x}_n \in D(\bar{A}_n)$ se cumple la desigualdad

$$\| \bar{A}_n \bar{x}_n \|_{\bar{Y}_n} \geqslant \gamma \| \bar{x}_n \|_{\bar{X}_n},$$

se dice que el esquema aproximado $\bar{A}_n \bar{x}_n = \bar{y}_n$ es *estable* o se cumple la *condición de estabilidad.*

Supongamos que la ecuación exacta $Ax = y$ es unívocamente resoluble, y x^* es su solución; las ecuaciones aproximadas $\bar{A}_n \bar{x}_n = \bar{y}_n$ para todos los n son unívocamente resolubles y $\bar{x}_n^*$ son sus soluciones. Si $\bar{x}_n^* \overset{T}{\to} x^*$ cuando $n \to \infty$, se dice que el esquema aproximado *converge.* Si, además, existen una constante $c > 0$ y un l natural tales, que sea válida la desigualdad

$$\| \bar{x}_n^* - T_n x^* \|_{\bar{X}_n} \| \leqslant c/n^l,$$

entonces se dice que el esquema aproximado converge *con grado l, o que el grado de exactitud* del esquema aproximado es igual a l.

TEOREMA 26.1. *Sean ecuaciones aproximadas y exactas unívocamente resolubles. Si se cumplen las condiciones de aproximación y estabilidad, el esquema aproximado converge y es válida la desigualdad*

$$\| \bar{x}_n^* - x^* \| \leqslant \gamma^{-1} \| \bar{A}_n T_n x^* - \bar{y}_n \|.$$

Si el esquema aproximado aproxima la ecuación exacta sobre x^* con grado l, entonces l es el grado de exactitud del esquema aproximado.

En este párrafo se consideran problemas de carácter general y sobre esquemas de diferencias, cuando A es un operador diferencial y $\bar{A}_n$ un operador de diferencias que lo aproxima. En el 28 se considera otra realización de esquemas aproximados (esquemas de Galiorkin).

26.1. Sean $\overline{x}_n \xrightarrow{T} x$, $y_n \xrightarrow{T} x$, cuando $n \to \infty$. Demostrar que para cualesquiera escalares α y β

$$\alpha\overline{x}_n + \beta\overline{y}_n \xrightarrow{T} \alpha x + \beta y.$$

26.2. Sean $X = l_2$, $\overline{X}_n = l_2^{(n)}$. Definamos los operadores de contracción T_n del modo siguiente: para todo $x = (\xi_k)_{k=1}^{\infty} \in l_2$ hacemos $T_n x = (\xi_{k+1})_{k=1}^{n}$. Sea $x_0 = (\xi_k^{(0)})_{k=1}^{\infty} \in l_2$. Demostrar que la sucesión $\overline{x}_n = (\xi_{k+1}^0)_{k=1}^n$ tiene un número infinito de T — límites (que atestigua sobre la mala aproximación del espacio l_2 por los espacios $l_2^{(n)}$ con la ayuda de operadores de contracción T_n).

26.3. Si de la relación $\| T_n x \|_{\overline{X}_n} \to 0$ cuando $n \to \infty$, se desprende que $x = 0$, entonces las normas en $\overline{X}_n$ se llaman *regulares*. Demostrar que para la unicidad del T-límite es necesario y suficiente que las normas sean regulares en $\overline{X}_n$.

26.4. Si $\| T_n x \|_{\overline{X}_n} \to \| x \|$ para todo $x \in X$ cuando $n \to \infty$, las normas en $\overline{X}_n$ se llaman *concordadas* con la norma en X. Demostrar que si las normas en $\overline{X}_n$ están concordadas con la norma en X, el T-límite es único.

26.5. Demostrar que si la sucesión $\| T_n x \|_{\overline{X}_n}$ es acotada para todo $x \in X$, resulta también acotada la sucesión

$$\| T_n \|_{\mathscr{L}(X, \overline{X}_n)}$$

26.6. Sea $X = C[0, l]$. Escojamos una red sobre $[0, l]$ para todo $n \in \mathbb{N}$, es decir, un conjunto de nodos $0 \leqslant t_1^{(n)} \ldots \ldots \leqslant t_n^{(n)} \leqslant l$. Introduzcamos operadores de contracción T_n haciendo $T_n x = (x(t_k^{(n)}))_{k=1}^n$. En calidad de $\overline{X}_n$ tomemos un *espacio reticular* (un espacio lineal de funciones dadas solamente sobre la red) con la siguiente norma: si $\overline{x}_n = (x_k^{(n)})_{k=1}^n \in \overline{X}_n$, $\| \overline{x}_n \|_{\text{cub}} = \max\limits_{1 \leqslant k \leqslant n} |(x_k^{(n)})|$ (así, $\overline{X}_n = c^n$). Demostrar que las normas en $\overline{X}_n$ están concordadas con la norma en X, o sea, para cualquier función $x(t) \in C[0, l]$

$$\lim_{n \to \infty} \max_{1 \leqslant k \leqslant n} |x(t_k^{(n)})| = \max_{t \in [0, l]} |x(t)|,$$

si $\lambda_n = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n-1} |t_{i+1}^{(n)} - t_i^{(n)}| \to 0$ cuando $n \to \infty$.

26.7. Con las condiciones del problema anterior damos las normas en $\overline{X}_n$ del modo siguiente:

$$\| \bar{x}_n \|_{esf} = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} |x_k^{(n)}|^2 (t_k^{(n)} - t_k^{(n-1)})}.$$

Demostrar que cuando $\lambda_n \to 0$

$$\lim_{n\to\infty} \| T_n x \|_{esf} = \Big[\int_0^l |x(t)|^2 \, dt \Big]^{1/2},$$

de donde se desprende la regularidad de las normas esféricas en $\overline{X}_n$.

26.8. Demostrar la desigualdad

$$\sqrt{\frac{l}{n}} \| \bar{x}_n \|_{cub} \leqslant \| \bar{x}_n \|_{esf} \leqslant \sqrt{l} \, \| \bar{x}_n \|_{cub}.$$

26.9. Una sucesión $\bar{x}_n \in \overline{X}_n$ se denomina *T-convergente* hacia el elemento $x \in X$:

a) *en media*, si $\| \bar{x}_n - T_n x \|_{esf} \to 0$, $n \to \infty$;

b) *uniformemente*, si $\| \bar{x}_n - T_n x \|_{cub} \to 0$, $n \to \infty$. Demostrar que de la *T*-convergencia uniforme se deduce la T-convergencia en promedio, pero que la afirmación contraria no es válida.

26.10. Si $\| \bar{x}_n - T_n x \|_{\overline{X}_n} \leqslant \varphi_n \to 0$ $(n \to \infty)$, se dice que $\bar{x}_n \xrightarrow{T} x$ con una velocidad φ_n. Si $\psi_n > 0$ y $\| \bar{x}_n - T_n x \|_{\overline{X}_n} = o(\psi_n)$ $(n \to \infty)$, se dice que $\bar{x}_n \xrightarrow{T} x$ *con una velocidad* $o(\psi_n)$. Demostrar que:

a) si $\bar{x}_n \xrightarrow{T} x$ uniformemente con una velocidad φ_n, entonces $\bar{x}_n \xrightarrow{T} x$, en promedio con la misma velocidad;

b) si $\bar{x}_n \xrightarrow{T} x$ en promedio con una velocidad $o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$, entonces $\bar{x}_n \xrightarrow{T} x$ uniformemente;

c) si $\bar{x}_n \xrightarrow{T} s$ en promedio con una velocidad $\varphi_n = o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$, entonces $\bar{x}_n \xrightarrow{T} x$ uniformemente con una velocidad $\sqrt{n}\,\varphi_n$.

26.11. Sean: $x(t)$, una función suficientemente suave sobre $[0, l]$; los operadores de contracción T_n y los espacios $\overline{x}_n$, dados como en el problema 26.6. ¿*T*-converge $\overline{x_n}$ hacia x

y con qué grado, si $t_i = il/n$, $i = 0, 1, 2, \ldots, n$ y:

a) $\tilde{\bar{x}}_n = \left\{\frac{1}{2} x(t_i^{(n)}) + \frac{1}{2} x(t_{i-1}^{(n)})\right\}_{i=1}^{n}$;

b) $\bar{\bar{x}}_n = \left\{\frac{1}{t_i - t_{i-1}} \int_{t_{i-1}}^{t_i} x(s)\, ds\right\}_{i=1}^{n}$?

26.12. Sean Q un rectángulo $(0 \leqslant x \leqslant 1,\ 0 \leqslant t \leqslant \theta)$, $C(Q)$ un espacio de funciones continuas sobre Q con la norma

$$\| u \| = \max_{(x,\ t) \in Q} | u(x, t) |.$$

Realicemos la partición de $[0, 1]$ en n partes iguales con los puntos $x_i = i/n$ $(i = 0, 1, \ldots, n)$ y el segmento $[0, \theta]$ en m partes iguales con los puntos $t_j = j\theta/m$ $(j = 0, 1, \ldots$ $\ldots m)$. Sea Q_{nm} un conjunto reticular.

$Q_{nm} = \{(x_i,\ t_j),\ i = 0,\ 1, \ldots, n;\ \ j = 0,\ 1, \ldots, m\}$.

Consideremos un espacio reticular $C(Q_{nm})$ con la norma

$$\| \bar{u}_{nm} \| = \max_{(x,\ t) \in Q_{nm}} | u(x, t) |.$$

Demostrar que las normas en $C(Q_{nm})$ están concordadas con la norma en $C(Q)$.

26.13. Se dice que una sucesión $\bar{A}_n$ *aproxima* A *sobre el elemento* $x \in D(A)$ si $T_n x \in D(A)$ $(n \in \mathrm{N})$ y, cuando $n \to \infty$

$$\| \bar{A}_n T_n x - T_n' A x \|_{\bar{Y}_n} \to 0.$$

Sea que $\bar{A}_n$ aproxima A sobre la solución exacta x^*, $\bar{y}_n$ aproxima y. Demostrar que entonces la ecuación $Ax = y$ se aproxima por el esquema aproximado $\bar{A}_n \bar{x}_n = \bar{y}_n$ sobre x^*.

26.14. Sean $\bar{X}_n \equiv X$, $\bar{Y}_n \equiv Y$, T_n y T_n', operadores idénticos. Demostrar que la condición de aproximación de un operador A por una sucesión de operadores A_n sobre un conjunto $M \subset D(A)$ significa la convergencia fuerte de A_n hacia A sobre M.

26.15. Sean $X = Y = C[0, 1]$, $\bar{X}_n = \bar{Y}_n = c^n$, $T_n x =$ $= T_n' x = \left(x\left(\frac{k}{n}\right)\right)_{k=1}^{n}$, $Ax = \frac{dx}{dt}$ con $D(A)$ compuesto de funciones $x(t)$, continuamente diferenciables sobre $[0, 1]$ y que satisfacen la condición $x(0) = 0$. Demostrar que la su-

cesión de operadores

$$\overline{A}_n = \begin{Vmatrix} n & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -n & n & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -n & n & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -n & n \end{Vmatrix}$$

aproxima el operador A sobre $D(A)$.

26.16. Si se cumple la desigualdad

$$\| \overline{A}_n T_n x - T'_n A x \|_{\overline{Y}_n} \leqslant c(x)/n^l,$$

se dice que la sucesión $\overline{A}_n$ aproxima A sobre el elemento x con grado l. Sea que en las condiciones del problema anterior $x(t) \in D(A)$ y tiene su segunda derivada acotada sobre $[0, 1]$. Demostrar que $\overline{A}_n$ aproxima A sobre x con grado 1, además es correcta la estimación

$$\| \overline{A}_n T_n x - T'_n A x \|_{\overline{Y}_n} \leqslant \gamma_2/(2n),$$

donde $\gamma_2 = \sup\limits_{t \in (0,\ 1)} | x''(t) |$.

26.17. Sea que una sucesión $\overline{A}_n$ aproxima A sobre una solución exacta x^* con grado l, y que una sucesión $\overline{y}_n$ aproxima y con grado k. Demostrar que el esquema aproximado aproxima la solución exacta con grado mín (l, k).

26.18. Sean $\overline{R}_n = R(A_n)$ subespacios en $\overline{Y}_n$, y sea que sobre $\overline{R}_n$ están definidos los operadores $\overline{A}_n^{-1}$ y

$\| \overline{A}_n^{-1} \|_{\mathcal{L}(\overline{R}_n,\ \overline{X}_n)} \leqslant \gamma^{-1}$, donde $\gamma > 0$ es una constante.

Demostrar que para la sucesión $\overline{A}_n$ se cumple la condición de estabilidad. Demostrar que si se cumple la condición de estabilidad, los $R(\overline{A}_n)$ serán cerrados y, por consiguiente, son subespacios en $\overline{Y}_n$.

26.19. Sea $\overline{Y}_n = \overline{X}_n^*$. Demostrar que para $\overline{A}_n$ se cumple la condición de estabilidad, si para toda sucesión $\overline{x}_n \in D(\overline{A}_n)$ se verifica la desigualdad

$$\langle \overline{x}_n,\ \overline{A}_n \overline{x}_n \rangle \geqslant \gamma \| \overline{x}_n \|^2,$$

donde $\gamma > 0$ es una constante.

26.20. Demostrar que en las condiciones del problema 26.15 $\| \overline{A}_n^{-1} \| \leqslant 2$ y, por consiguiente, la condición de estabilidad se cumple.

26.21. Sea $\overline{X}_n$ e $\overline{Y}_n$ de dimensiones finitas iguales y que cumplan la condición de estabilidad. Demostrar que $N(\overline{A}_n) = 0$, o sea, $\overline{A}_n$ aplica biunívocamente $\overline{X}_n$ sobre $\overline{Y}_n$.

26.22. Sea que para todas las soluciones posibles $\overline{x}_n$ de un esquema aproximado $\overline{A}_n \overline{x}_n = \overline{y}_n$ se ha obtenido la estimación $\| \overline{x}_n \| \leqslant \gamma^{-1} \| \overline{y}_n \|$, donde γ es una constante (estas estimaciones se llaman apriorísticas). Demostrar que en este caso la condición de estabilidad se cumple.

26.23. Sea que para $\overline{y}_n \in R(\overline{A}_n)$ un esquema aproximado $\overline{A}_n \overline{x}_n = \overline{y}_n$ tiene la solución única $\overline{x}_n$. Se dice que la solución $\overline{x}_n$ depende continuamente de los segundos miembros $\overline{y}_n$ tomadas uniformemente respecto a n, si para cualquier $\varepsilon > 0$ existe un $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, tal, que para todos los $\overline{y}_n$, $\overline{y}'_n \in R(\overline{A}_n)$, tales que $\| \overline{y}_n - \overline{y}'_n \| < \delta$, para las soluciones respectivas $\overline{x}'_n$, $\overline{x}'_n$, se cumple la desigualdad $\| \overline{x}_n - \overline{x}'_n \| < \varepsilon$. Demostrar que para que el esquema aproximado sea estable, es necesario y suficiente que sus soluciones dependan continuamente de los segundos miembros tomados uniformemente respecto a n.

26.24. Sea que se cumple la condición de estabilidad. Demostrar que toda ecuación aproximada no tiene más de una solución.

26.25. Sean x_1, x_2, soluciones exactas, es decir, $Ax_1 = y$, $Ax_2 = y$, y que se cumple la condición de estabilidad. Demostrar que es válida la desigualdad

$$\gamma \| T_n (x_1 - x_2) \|_{\overline{X}_n} \leqslant$$

$$\leqslant \| \overline{A}_n T_n x_1 - T'_n A x_1 \|_{\overline{Y}_n} + \| \overline{A}_n T_n x_2 - T'_n A x_2 \|_{\overline{Y}_n}.$$

26.26. Sea que una sucesión $\overline{A}_n$ aproxima A sobre cada solución exacta, las normas en $\overline{X}_n$ son regulares (véase el problema 26.3) y se cumple la condición de estabilidad. Empleando la desigualdad del problema anterior demostrar que la ecuación exacta no tiene más de una solución.

26.27. Sea que para las condiciones del problema anterior $y_n \xrightarrow{T} y$ para $n \to \infty$. Demostrar:

a) la validez de la estimación

$$\| x_n - T_n x \|_{\overline{X}_n} \leqslant \gamma^{-1} \{ \| \overline{y}_n - T'_n y_n \|_{\overline{Y}_n} + \| T'_n A x - \overline{A}_n T_n x \| \}$$

donde x es la solución exacta;

b) la convergencia del esquema aproximado.

En los problemas 26.28 — 26.34 sobre el segmento $[0, l]$ se considera el problema de Cauchy

$$\frac{dx}{dt} + a(t)\, x = f(t), \quad x(0) = \alpha.$$

Hagamos $X = C[0, l]$, $Y = C[0, l] + \mathbf{R}$, $Ax = \left\{ \frac{dx}{dt} + a(t)\, x,\ x(0) \right\}$, $D(A) \in C^1[0, l]$, $a(t)$, $f(t) \in C[0, l]$. Sobre $[0, l]$ tomemos una red uniforme $\sum = \{t_k\}_{k=1}^n$, $t_k = k\tau$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$, donde $\tau = ln^{-1}$ es el paso de la red. Sean $\overline{X}_n$ un espacio n-dimensional de las columnas $\overline{x}_n = (x_i)_{i=1}^n$, $\| \overline{x}_n \| = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} | x_i |$, $\overline{Y}_n = \overline{X}_n + \mathbf{R}$ y sea que operadores de contracción tienen la forma

$$T_n x = (x(t_k))_{k=1}^n, \quad T'_n y = \{T_n f, \alpha\}.$$

26.28. Consideremos el esquema de diferencias

$$\frac{x_i - x_{i-1}}{\tau} + a_i x_{i-1} = f_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

$$x_0 = \alpha, \quad (f_i)_{i=1}^n = T_n f, \quad (a_i)_{i=1}^n = T_n a.$$

a) Escribir el esquema en la forma canónica:

$$x_i = R_i(\tau)\, x_{i-1} + \tau f_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n; \ x_0 = \alpha,$$

donde $| R_i(\tau) | \leqslant 1 + c\tau$, $c = \| a \|_{C[0, l]}$.

b) Demostrar que el esquema tiene la solución única $\overline{x}_n = (x_i)_{i=1}^n$ además, para $i = 1, 2, \ldots, n$ es válida la estimación

$$| x_i | \leqslant (1 + c\tau)^i | \alpha | + \sum_{k=0}^{i-1} (1 + c\tau)^k \tau \| \overline{f}_n \|.$$

c) Obtener la estimación apriorística

$$\| \overline{x}_n \| \leqslant e^{cl} | \alpha | + \frac{e^{cl} - 1}{c} \| \overline{f} \|.$$

d) Demostrar la estabilidad del esquema de diferencias.

26.29. Escribamos el esquema de diferencias del problema anterior en la forma reticular ($\sum$—red):

$$\frac{\widetilde{x}(t)-\widetilde{x}(t-\tau)}{\tau}+a(t)\,\widetilde{x}(t-\tau)=f(t),\quad t\in\sum,\quad \widetilde{x}(0)=\alpha.$$

a) Empleando la fórmula de Taylor demostrar que el esquema de diferencias aproxima el problema inicial de Cauchy (sobre la solución exacta) en cada nodo t_k de la red $\sum$.

b) Demostrar que es válida la estimación

$$\Delta_n=\|\overline{A}_nT_nx-\overline{y}_n\|_{\overline{Y}_n}=$$

$$=\sup_{t\in\Sigma}\left|\frac{\widetilde{x}(t)-\widetilde{x}(t-\tau)}{\tau}-a(t)\,\widetilde{x}(t-\tau)-f(t)\right|\leqslant\frac{1}{2}\,\gamma_2\tau$$

donde $\gamma_2=\sup\limits_{t\in[0,\ l]}\|x''(t)\|$.

26.30. Consideremos el esquema de diferencias

$$\frac{x_i-x_{i-1}}{\tau}+[\alpha_1a(t_{i-1})+\alpha_2a(t_i)][\beta_1x_{i-1}+\beta_2x_i]=$$

$$=\gamma_1f(t_{i-1})+\gamma_2f(t_i),\quad i=1,\ 2,\ \ldots,\ n;$$

$$x_0=\alpha.$$

¿De qué modo hay que escoger las constantes α_1, α_2, β_1, β_2, γ_1, γ_2 para que este esquema aproxime el problema exacto con grado 2?

26.31. Consideremos el esquema de diferencias del problema anterior para $\alpha_1=\alpha_2=\beta_1=\beta_2=\gamma_1=\gamma_2=1/2$.

a) Demostrar que este esquema tiene solución única si

$$c\tau<2,\quad c=\|a\|_{C[0,\ l]}.$$

b) Escribir el esquema en la forma canónica

$$x_i=R_i(\tau)\,x_{i-1}+\tau h_i,\quad i=1,\ 2,\ \ldots,\ n;\ x_0=\alpha.$$

c) Demostrar que son válidas las desigualdades

$$|R_i(\tau)|\leqslant1+2c\tau,\quad |h_i|\leqslant2\|\bar{f}_n\|.$$

d) Empleando las desigualdades del párrafo c) demostrar la estabilidad del esquema de diferencias.

26.32. Sea que la solución exacta $x(t)$ tiene la tercera derivada acotada sobre $[0,\ l]$.

a) Demostrar que el esquema de diferencias del problema 26.29 tiene segundo grado de exactitud.

b) Estimar $\|\overline{x}_n-T_nx\|_{\overline{X}_n}$.

26.33. Demostrar que el esquema de diferencias

$$\frac{x_{i+1}-x_{i-1}}{2\tau}+a_i x_i = f_i, \quad (a_i)_{i=1}^{n} = T_n a;$$

$$(f_i)_{i=1}^{n} = T_n f, \quad i=1, 2, \ldots, n-1, \; x_0=\alpha$$

$$\frac{x_1-x_0}{\tau} = f(0) - a(0)\,\alpha$$

es resoluble unívocamente. Escribirlo en la forma reticular y demostrar que este esquema aproxima el problema inicial con grado 2 si la solución exacta tiene la tercera derivada acotada sobre $[0, l]$

26.34. Escribamos el esquema de diferencias del problema anterior en la forma canónica matricial:

$$u_i = R_i(\tau)\, u_{i-1} + \tau h_i, \quad i=1, 2, \ldots, n-1,$$

donde u_0 está dado;

$$u_0 = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}, \quad u_i = \begin{pmatrix} x_i \\ x_{i+1} \end{pmatrix}, \quad R_i(\tau) = \left\| \begin{matrix} 0 & 1 \\ 1-2 & a_i\tau \end{matrix} \right\|,$$

$$h_i = \begin{pmatrix} 0 \\ 2f_i \end{pmatrix}, \quad \beta = \alpha + \tau[f(0) + a(0)\,\alpha].$$

En el espacio bidimensional surgido fijemos la norma: para $u = (\xi_1, \xi_2)$ tomemos $\| u \| = \max \{| \xi_1 |, | \xi_2 |\}$.

a) Demostrar que son válidas las estimaciones

$$\| R_i(\tau) \| \leqslant 1 + 2c\tau, \quad c = \| a \|_{\widetilde{C}[0,\, l]}, \quad \| h_i \| \leqslant 2 \| \overline{f}_{n-1} \|_{\overline{X}_{n-1}}.$$

b) Empleando las estimaciones del párrafo a) demostrar la estabilidad del esquema de diferencias.

c) Demostrar que el esquema de diferencias del problema 26.33 tiene grado de exactitud 2.

d) Estimar $\| \overline{x}_n - T_n x \|_{\overline{X}_n}$.

26.35. Demostrar que el esquema de diferencias

$$\frac{2x_{i+1}+3x_i-5x_{i-1}}{\tau} = 0, \quad i=1, 2, \ldots, n-1; \; x_0 = 1,$$

$$x_1 = 1 + \tau^2, \; \tau = 1/n,$$

aproxima el problema de Cauchy

$$\frac{dx}{dt} = 0, \; x(0) = 1, \quad t \in [0, 1]$$

sobre su solución exacta.

26.36. Demostrar que:

a) el esquema de diferencias del problema anterior tiene

la solución

$$x_i = 1 + \tau^2 (2^i - 1), \quad i = 0, 1, \ldots, n-1;$$

b) si x es la solución exacta, entonces $\| \bar{x}_n - T_n x \| \to \infty$ cuando $n \to \infty$ y, por consiguiente, el esquema de diferencias diverge. Explicar por que del párrafo b) se desprende la inestabilidad del esquema.

26.37. Demostrar que el esquema de diferencias

$$\frac{ax_{i+1} - (a+c)\, x_i + cx_{i-1}}{\tau} = 0$$

$$i = 1, 2, \ldots, n-1; \quad x_0 = 1; \quad x_1 = 1 + \tau^2, \quad \tau = 1/n,$$

para $c \neq a$, $a \neq 0$ aproxima el problema de Cauchy $x'(t) = 0$, $x(0) = 1$ ($t \in [0, 1]$) sobre su solución exacta).

26.38. Demostrar que un esquema de diferencias del problema anterior converge, si $|c/a| < 1$ o $c = -a$, y diverge si $|c/a| > 1$.

En los problemas 26.39—26.41 se considera el problema de Cauchy para un sistema de k ecuaciones diferenciales con k funciones incógnitas de una variable $t \in [0, l]$:

$$\frac{dx}{dt} + B(t)\, x = f(t), \quad x(0) = \alpha.$$

Aquí, la función incógnita se halla en X, un espacio de funciones vectoriales $x(t) = (x_s(t))_{s=1}^{k}$, con norma

$$\| x \| = \max_{1 \leqslant s \leqslant k} \max_{t \in [0,\, l]} |x_s(t)|,$$

$B(t)$ es una matriz de grado k con elementos continuos $b_{ij}(t)$ ($i, j = 1, 2, \ldots, k$), $f(t) \in X$, $\alpha \in c^k$, $Y = X \dotplus c^k$. Introduzcamos el operador A: sea que $D(A)$ consiste de funciones x, continuamente diferenciables sobre $[0, l]$, $Ax = \{x'(t) + B(t)\, x,\ x(0)\}$ para $x \in D(A)$. Sobre $[0, l]$ está dada una red uniforme con paso $\tau = ln^{-1}$. De la teoría de las ecuaciones diferenciales ordinarias se conoce que el problema $Ax = y$, siendo $y = \{f, \alpha\}$ tiene una única solución clásica.

26.39. Consideremos el esquema de diferencias

$$\frac{x_i - x_{i-1}}{\tau} + B(t_i)\, x_{i-1} = f(t_i), \quad t = 1, 2, \ldots, n; \quad x_0 = \alpha.$$

a) Escribir el esquema de diferencias en la forma reticular y demostrar que si la solución exacta tiene la segunda de-

rivada acotada sobre $[0, l]$ el esquema de diferencias aproxima el problema inicial sobre la solución exacta con grado 1.

b) Escribir el esquema de diferencias en la forma canónica:

$$x_i = R_i(\tau)\, x_{i-1} + \tau f_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n; \; x_0 = \alpha$$

y demostrar la estabilidad del esquema de diferencias.

c) Demostrar que el esquema de diferencias converge y estimar

$$\| \overline{x}_n - T_n x \|_{\overline{X}_n}$$

26.40. Sean: $f(t) \equiv 0$; $A(t) \equiv A$, una matriz constante sobre $[0, l]$ que tiene k vectores propios linealmente independientes φ_j $(j = 1, 2, \ldots, k)$, correspondientes a los valores propios λj $(j = 1, 2, \ldots, k)$. Consideremos el esquema de diferencias

$$\frac{x_i - x_{i-1}}{\tau} + A x_{i-1} = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n; \; x_0 = \alpha.$$

a) Hallar soluciones del problema oxacto y del esquema de diferencias, en forma de desarrollo en serie de vectores propios de la matriz A:

$$x(t) = \sum_{j=1}^{k} \xi_j(t)\, \varphi_j, \quad x_i = \sum_{j=1}^{k} \xi_{ij} \varphi_j, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

b) Demostrar la desigualdad

$$|(1 + \lambda\tau)^{t/\tau} - e^{\lambda t}| \leqslant \frac{l}{2} \lambda^2 \tau e^{\lambda t}$$

y empleándola estimar $\| \overline{x}_n - T_n x \|_{\overline{X}_n}$

26.41. Sobre $[0, +\infty)$ consideremos el problema de Cauchy con la matriz constante C $(x \in E^k)$.

$$\frac{dx}{dt} = Cx, \quad x(0) = \alpha$$

y la familia de los esquemas de diferencias $(\tau \| C \| < 1, \tau > 0)$

$$\frac{\widetilde{x}(t+\tau) - \widetilde{x}(t)}{\tau} = C\widetilde{x}(t), \quad \widetilde{x}(0) = \alpha.$$

a) Verificar que $x(t) = e^{Ct}\alpha$ es la solución exacta, y que $\widetilde{x}(t) = (I + \tau C)^{t/\tau} \alpha$ es la única solución del esquema de diferencias.

b) Demostrar que en $\mathcal{L}(X)$, cuando $\tau \to +0$,

$$(I + \tau C)^{t/\tau} \to e^{Ct}.$$

c) Estimar $\| x(t) - \widetilde{x}(t) \|$ cuando $\tau \to +0$.

26.42. Consideremos, sobre $[0, l]$ el problema de Cauchy para la ecuación diferencial de segundo orden

$$\frac{d^2x}{dt^2} + b(t)\frac{dx}{dt} + c(t)x(t) = y(t), \quad x(0) = \alpha, \quad x'(0) = \beta.$$

Escribámosla en forma del sistema

$$\frac{dx}{dt} - u(t) = 0,$$

$$\frac{du}{dt} + b(t)u + c(t)x(t) = y(t), \quad x(0) = \alpha, \quad u(0) = \beta$$

a) Demostrar que para una red uniforme el esquema de diferencias

$$\frac{x_i - x_{i-1}}{\tau} - u_{i-1} = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n; \; x_0 = \alpha,$$

$$\frac{u_i - u_{i-1}}{\tau} + b(t_{i-1})u_{i-1} + c(t_{i-1})x_{i-1} = y(t_{i-1}),$$

$$i = 1, 2, \ldots, n; \quad u_0 = \beta$$

converge, además $\overline{x}_n$ aproxima $x(t)$, y $\overline{u}_n$ aproxima $x'(t)$.

b) Dar las respectivas estimaciones.

26.43. Demostrar que con las condiciones del problema 26.42, el esquema de diferencias

$$\frac{x_{i+1} - 2x_i + x_{i-1}}{\tau^2} + b(t_{i-1})\frac{x_i - x_{i-1}}{\tau} + c(t_{i-1})x_{i-1} = y(t_{i-1}),$$

$$i = 1, 2, \ldots, n-1; \; x_0 = \alpha, \quad \frac{x_1 - x_0}{\tau} = \beta,$$

es resoluble unívocamente y converge, además, $\overline{x}_n = (x_i)_{i=1}^n$ aproxima $x(t)$, y $\overline{x}'_n = \left(\frac{x_i - x_{i-1}}{\tau}\right)_{i=1}^n$ aproxima $x'(t)$.

En los problemas 26.44—26.47 se considera el problema de contorno

$$-\frac{d^2x}{dt^2} + c(t)x(t) = y(t), \quad t \in [0, l], \; x(0) = x(l) = 0.$$

Aquí $X = Y = C[0, l]$, $c(t)$, $y(t) \in C[0, l]$, $Ax = -\frac{d^2x}{dt^2} + c(t)x$, $D(A)$ es un conjunto de funciones $x(t)$ que son dos

veces continuamente diferenciables sobre $[0, l]$ y que satisfacen las condiciones de frontera $x(0) = x(l) = 0$. Para una red uniforme sobre $[0, l]$, $\overline{X}_n = \overline{Y}_n$ son espacios de las columnas $\bar{x}_n = (x_h)_{h=1}^{n-1}$ de altura $n-1$ con norma $\|\bar{x}_n\|_{\text{est}}^2 = \tau \sum_{h=1}^{n-1} |x_h|^2$, los operadores de contracción $T_n x = T_n' x = (x(t_h))_{h=1}^{n-1}$.

26.44. Demostrar que el esquema de diferencias

$$\frac{x_{h+1} - 2x_h + x_{h-1}}{\tau^2} + c(t_h)\, x_h = y(t_h),$$

$$k = 1, 2, \ldots, n-1; \quad x_0 = x_n = 0$$

aproxima el problema inicial con grado 2 si la solución exacta tiene la cuarta derivada acotada sobre $[0, l]$.

26.45. Demostrar las desigualdades ($x_0 = x_n = 0$):

a) $-\sum_{s=1}^{n-1} (x_{s+1} - 2x_s + x_{s-1})\, x_s = \sum_{h=1}^{n} (x_h - x_{h-1})^2$;

b) $\|\bar{x}_n\|^2 = \sum_{s=1}^{n-1} |x_s|^2 \leqslant \frac{l^2}{2} \tau^{-1} \sum_{h=1}^{n} (x_h - x_{h-1})^2$.

26.46. Sea $c(t) \geqslant 0$ sobre $[0, l]$.

a) Escribir el esquema de diferencias del problema 26.44 en la forma matricial $\bar{A}_n \bar{x}_n = \bar{y}_n$.

b) Empleando las desigualdades del problema 26.45 demostrar la estimación apriorística

$$(\bar{A}_n \bar{x}_n, \bar{x}_n) \geqslant 2l^{-2} \|\bar{x}_n\|_{\text{est}}^2,$$

de donde, en virtud del problema 26.19, se deduce la estabilidad del esquema de diferencias.

26.47. Sea que la solución exacta $x(t)$ tiene la cuarta derivada acotada sobre $[0, l]$, $\gamma_4 = \sup_{t \in [0, l]} |x^{(4)}(t)|$, $\bar{x}_n$ es la solución del esquema de diferencias del problema 26.44.

a) Demostrar que es cierta la estimación

$$\|\bar{x}_n - T_n x\|_{\text{est}} \leqslant \frac{\gamma_4 l^4 \sqrt{l}}{24n^2}.$$

b) Empleando el problema 26.46 demostrar que

$$\|\bar{x}_n - T_n x\|_{\text{cub}} = \max_{1 \leqslant h \leqslant n} |x_h - x(t_h)| \leqslant \frac{\gamma_4 l^4 \sqrt{l}}{24n^{3/2}}$$

§ 27. Interpolación por los splines

Sean X, $\overline{X}$, espacios de Hilbert, además $\overline{X} = TX$, donde $T \in \mathcal{L}(X, \overline{X})$ es un operador de contracción según los términos del 26. Sea Y un espacio de Hilbert y sea un operador $A \in \mathcal{L}(X, Y)$. Un elemento $s \in X$ se denomina *spline de interpolación* ((T, A)-*spline*) correspondiente al «vector de datos de entrada» $\overline{x} \in X$ si

$$\| As \|_Y^2 = \inf_{x \in T^{-1}(\overline{x})} \| Ax \|^2.$$

Aquí se designa mediante $T^{-1}(\overline{x})$ al conjunto de preimágenes de un elemento $\overline{x}$ para la aplicación T, es decir, un conjunto de soluciones de la ecuación $Tx = \overline{x}$. Con mayor frecuencia T es un operador de contracción de una función sobre un conjunto reticular. De este modo, el *spline* de interpolación s realiza, en cierto sentido, la prolongación (la interpolación) óptima del elemento $\overline{x}$ en un elemento del espacio X.

TEOREMA 27.1. *Si una variedad lineal $AN(T)$ es cerrada y $N(A) \cap N(T) = 0$, entonces para todo $\overline{x} \in \overline{X}$ existe un único (T, A)-spline de interpolación s.*

TEOREMA 27.2. *Sean un operador A normalmente resoluble, su núcleo $N(A)$ de dimensión finita y $N(A) \cap N(T) = 0$. Entonces la variedad lineal $AN(T)$, es cerrada.*

27.1. Sea s un (T, A)-*spline* de interpolación. Demostrar que para cualesquiera $z \in X$ tales, que $Tz = 0$, se cumple la relación de ortogonalidad $(As, Az) = 0$.

27.2. Sea que un elemento $s \in X$ interpola $\overline{x}$, es decir, satisface la relación $Ts = x$, ya que para cualesquiera $z \in N(T)$ se cumple la relación de ortogonalidad $(As, Az) = 0$. Demostrar que s es un (T, A)-spline de interpolación.

27.3. Sean: $X = H^1[0, l]$; $Y = L_2[0, l]$; $\overline{X} = E^{n+1}$, un espacio reticular de funciones dadas sobre la red $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = l$; T, un operador de contracción de la función $x(t) \in H^1[0, l]$ sobre esta red. Sea $Ax = \frac{dx}{dt}$, $A \in \mathcal{L}(H^1[0, l], L_2[0, l])$. Demostrar que la función lineal a trozos

$$s_i(t) = x_i + (x_{i+1} - x_i) \frac{t - t_i}{t_{i+1} - t_i},$$

$$t \in [t_i, t_{i+1}], \quad i = 0, 1, \ldots, n-1,$$

interpola el vector $\bar{x} = \{x_i\}_{i=0}^{n}$, satisface la relación de ortogonalidad y, por consiguiente, según el problema 27.2, es un *spline* de interpolación (este *spline* se llama *lineal*).

27.4. Sea $\theta_k(t)$ una función característica del segmento $[t_{k-1}, t_k]$: $\theta_k(t) = 1$ sobre $[t_{k-1}, t_k]$ y $\theta_k(t) = 0$ fuera de $[t_{k-1}, t_k]$. Comprobar que

$$s_1(t) = \sum_{k=1}^{n} \frac{x_{k-1}(t_k - t) + x_k(t - t_{k-1})}{t_k - t_{k-1}} \theta_k(t).$$

27.5. Sean s, $\tilde{s}$ dos (T, A)-splines correspondientes a un mismo vector $\bar{x}$.

a) Empleando la relación de ortogonalidad demostrar que $(As, A\tilde{s}) = \| As \|^2 = \| A\tilde{s} \|^2$.

b) Empleando el problema 3.19 demostrar que $A(s - \tilde{s}) = 0$, o sea, que $s - \tilde{s} \in N(A)$.

27.6. Sea $N(A) \cap N(T) = 0$. Demostrar que a cada $\bar{x} \in \bar{X}$ corresponde no más de un (T, A)-*spline*.

27.7. Empleando los problemas 27.4 y 27.5 demostrar que la función lineal a trozos es el único *spline* lineal de interpolación.

27.8. Consideremos, sobre el segmento $[0, l]$, un sistema de funciones

$$\omega_0(t) = \begin{cases} 1 - t/t_1 & \text{sobre } [0, t_1], \\ 0 & \text{sobre } [t_1, t_n]; \end{cases}$$

$$\omega_i(t) = \begin{cases} \dfrac{t - t_{i-1}}{t_i - t_{i-1}} & \text{sobre } [t_{i-1}, t_i], \\ \dfrac{t_i - t}{t_{i+1} - t_i} & \text{sobre } [t_i, t_{i+1}], \\ 0 \text{ fuera de } [t_{i-1}, t_{i+1}], & i = 1, 2, \ldots, n-1; \end{cases}$$

$$\omega_n(t) = \begin{cases} 0 & \text{sobre } [0, t_{n-1}], \\ \dfrac{t - t_{n-1}}{t_n - t_{n-1}} & \text{sobre } [t_{n-1}, t_n]. \end{cases}$$

a) Trazar las gráficas de estas funciones.

b) Demostrar que en las condiciones del problema 27.3, $\omega_i(t)$ es un spline que corresponde al vector de los datos de entrada $\bar{x}^i$ con coordenadas $x_i = 1$, $x_k = 0$ $(k = 1, 2, \ldots, i-1, i+1, \ldots, n)$.

27.9. Sea $\theta_i(t)$ una función característica del segmento $[t_{i-1}, t_i]$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Verificar que sobre $[0, l]$

$$\omega_0(t) = \left(1 - \frac{t}{t_1}\right)\theta_1(t), \quad \omega_n(t) = \frac{t - t_{n-1}}{t_n - t_{n-1}}\theta_n(t),$$

$$\omega_i(t) = \frac{t - t_{i-1}}{t_i - t_{i-1}}\theta_i(t) + \frac{t_i - t}{t_i - t_{i-1}}\theta_{i+1}(t),$$

$$i = 1, 2, \ldots, n-1.$$

27.10. Comprobar que $s_1(t) = \sum_{i=0}^{n} x_i \omega_i(t)$, es decir, que el sistema $\omega_i(t)$ $(i = 0, 1, \ldots, n)$ forma una base en el espacio de los *splines* lineales.

27.11. Para el caso de la red uniforme $t_i = ih$, $nh = l$ $(i = 0, 1, \ldots, n)$, demostrar que sobre $[0, l]$

$$\omega_i(t) = \omega\left(\frac{t}{h} - i\right), \quad i = 0, 1, \ldots, n,$$

donde

$$\omega(s) = \begin{cases} 1 + s \text{ sobre } [-1, 0], \\ 1 - s \text{ sobre } [0, 1], \\ 0 \quad \text{fuera de } [-1, 1]. \end{cases}$$

27.12. Sean: $X = H^2[0, l]$; $Y = L_2[0, l]$; $\bar{X} = E^{n+1}$, $n \geqslant 1$; $Tx(t) = \{x(t_i)\}_{i=0}^{n}$, $Ax(t) = x''(t)$. Demostrar que $N(A) \cap N(T) = 0$ y, por consiguiente, el problema de búsqueda de (T, A)-*splines* no tiene más de una solución.

27.13. Demostrar que si la variedad lineal $AN(T)$ es cerrada, la variedad afín $AT^{-1}(\bar{x})$ es también cerrada.

27.14. Empleando el teorema 15.4 demostrar que en las condiciones del problema 27.13 existe un único elemento que realiza, en el espacio Y, la distancia desde 0 hasta la variedad afín $AT^{-1}(\bar{x})$. Demostrar que existe un *spline* s que interpola $\bar{x}$, él es la solución común de las ecuaciones $As = y$, $Ts = \bar{x}$.

27.15. Empleando los problemas 27.13 y 27.14 demostrar que en las condiciones del problema 27.12 el (T, A)-*spline* existe.

27.16. A una función $s_3(t)$ la denominaremos *spline* cúbico que interpola la función reticular $\bar{x} = \{x_i\}_{i=0}^{n}$ si:

1) $s_3(t) \in C^2[0, l]$;

2) sobre cada segmento $[t_i, t_{i+1}]$, $s_3(t)$ es un polinomio no mayor de tercer grado;

3) $Ts_3 = \overline{x}$;

4) $s_3''(0) = s_3''(l) = 0$.

Sea sobre $[t_i,\ t_{i+1}]$ $(i = 0,\ 1,\ \ldots,\ n-1)$

$$s_3''(t) = \beta_i \frac{t_{i+1}-t}{t_{i+1}-t_i} + \beta_{i+1} \frac{t-t_i}{t_{i+1}-t_i},$$

donde $\beta_0 = \beta_n = 0$, según el párrafo 4). Demostrar que sobre $[t_i,\ t_{i+1}]$ $(i = 0,\ 1,\ \ldots,\ n-1)$

$$s_3(t) = \beta_i \frac{(t_{i+1}-t)^3}{6\tau_{i+1}} + \beta_{i+1} \frac{(t-t_i)^3}{6\tau_{i+1}} +$$

$$+ \left(x_i - \frac{\beta_i \tau_{i+1}^2}{6}\right) \frac{t_{i+1}-t}{\tau_{i+1}} + \left(x_{i+1} - \frac{\beta_{i+1}\tau_{i+1}^2}{6}\right) \frac{t-t_i}{\tau_{i+1}},$$

donde $\tau_{i+1} = t_{i+1} - t_i$.

27.17. En las condiciones del problema 27.16:

a) calcular $s_3'(t)$;

b) igualando $s_3'(t_i - 0)$ y $s_3'(t_i + 0)$, demostrar que las constantes $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{n-1}$ satisfacen el sistema de ecuaciones:

$$\begin{Vmatrix} \frac{\tau_1+\tau_2}{6} & \frac{\tau_2}{6} & 0 & \ldots & 0 \\ \frac{\tau_2}{6} & \frac{\tau_2+\tau_3}{6} & \frac{\tau_3}{6} & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \frac{\tau_{n-1}+\tau_n}{6} \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \ldots \\ \beta_{n-1} \end{Vmatrix} =$$

$$= \begin{Vmatrix} \frac{x_2-x_1}{\tau_2} - \frac{x_1-x_0}{\tau_1} \\ \ldots \\ \frac{x_n-x_{n-1}}{\tau_n} - \frac{x_{n-1}-x_{n-2}}{\tau_{n-1}} \end{Vmatrix};$$

c) demostrar que este sistema tiene solución única, y, de este modo, para cada $\overline{x}$ existe un único spline cúbico $s_3(t)$.

27.18. Verificar que para el *spline* cúbico $s_3(t)$ se cumple la relación de ortogonalidad y, por consiguiente, conforme al problema 27.2, $s_3(t)$ es un (T, A)-*spline* en las condiciones del probocma 27.12.

27.19. Consideremos la función

$$\sigma(t) = \frac{1}{6} \begin{cases} 0 & \text{para } t \geqslant 2, \\ (2-t)^3 & \text{sobre } [1,\ 2], \\ 1 + 3(1-t) + 3(1-t)^2 - 3(1-t)^3 & \text{sobre } [0,\ 1], \end{cases}$$

$\sigma(t) = \sigma(-t)$ para $t < 0$. Demostrar que la función $\sigma(t)$ es dos veces continuamente diferenciable sobre $(-\infty, +\infty)$ y trazar su gráfica.

27.20. En las condiciones del problema 27.19 introduzcamos sobre $[0, l]$ el sistema de funciones

$$\sigma_i(t) = \sigma(t/h - i), \quad i = 0, 1, \ldots, n; \quad h = l/n.$$

Demostrar que para cualquier función $z(t) \in H^2[0, l]$ tal, que $z(jh) = 0$ $(j = 0, 1, \ldots, n)$, se cumple la relación de ortogonalidad

$$\int_0^l \sigma_i''(t)\, z''(t)\, dt = 0,$$

y, por consiguiente, según el problema 27.2, $\sigma_i(t)$ es un *spline* cúbico que corresponde al vector de los datos de entrada $\bar{x}$ con coordenadas $x_i = 2/3$, $x_{i-1} = x_{i+1} = 1/6$, $x_k = 0$ para $k \neq i - 1, i, i + 1$ (para $i = 0$, $x_0 = 2/3$, $x_1 = 1/6$, $x_k = 0$, si $k > 1$, y para $i = n$, $x_k = 0$, si $k < n - 1$, $x_{n-1} = 1/6$, $x_n = 2/3$).

27.21. Verificar que en las condiciones del problema 27.20 el sistema $\sigma_i(t)$ $(i = 0, 1, \ldots, n)$ forma una base en el espacio de los splines cúbicos en el caso de la red uniforme, además

$$s_3(t) = \sum_{i=0}^{n} \xi_i \sigma_i(t),$$

donde el vector $\bar{\xi}$ se determina partiendo del sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{Vmatrix} 2/3 & 1/6 & 0 & \ldots & 0 \\ 1/6 & 2/3 & 1/6 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 2/3 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} \xi_0 \\ \xi_1 \\ \ldots \\ \xi_n \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} x(0) \\ x(h) \\ \ldots \\ x(l) \end{Vmatrix}$$

27.22. Sean: $X = H^1[0, l]$; $\bar{X}_n$, un espacio de columnas $(n + 1)$-dimensionales con la norma

$$\|\bar{x}_n\| = \max_{0 \leqslant k \leqslant n} |x_k| + \tau^{-1} \max_{0 \leqslant k \leqslant n-1} |x_{k+1} - x_k|,$$

$t_k = k\tau$, $n\tau = l$, $T_n x = (x(t_k))_{k=0}^n$. Sea S_n un operador de la interpolación lineal a trozos que pone un *spline* lineal $s_1(t)$ en correspondencia al vector de los datos de entrada $(x(t_k))_{k=0}^n$. Demostrar que:

a) $S_n \mathcal{L}(\overline{X}_n, X)$ y $\|S_n\| \geq 2\sqrt{l}$;

b) el operador S_n es inverso derecho del operador T_n.

27.23. Sean dados espacios de Banach X, $\overline{X}_n$ $(n \in \mathbf{N})$ y operadores de contracción $T_n \in \mathcal{L}(X, X_n)$, $T_n X = \overline{X}_n$. Demostrar que si un operador $S_n \in \mathcal{L}(\overline{X}_n, X)$ es inverso derecho del operador T_n $(n \in \mathbf{N})$, los operadores $P_n = S_n T_n$ son proyectores acotados sobre $X_n = S_n \overline{X}_n$ $(n \in \mathbf{N})$.

27.24. En las condiciones de los problemas 27.22 y 27.23:

a) demostrar que el proyector P_n puede darse en la forma

$$P_n x = \sum_{i=0}^{n} x(t_i)\, \omega_i(t),$$

donde $\omega_i(t)$ $(i = 0, 1, \ldots, n)$ es el sistema de funciones del problema 27.8;

b) demostrar que

$$x - P_n x = \sum_{i=1}^{n} \theta_i(t) \left\{ x(t) - x(t_{i-1}) - [x(t_i) - x(t_{i-1})] \frac{t - t_{i-1}}{t_i - t_{i-1}} \right\};$$

b) empleando la fórmula de Taylor demostrar que cuando $n \to \infty$

$$\|x - P_n x\|_{H^1[0,\, l]} = O\left(\frac{1}{n}\right), \quad \text{si } x \in H^1[0,\, l],$$

$$\|x - P_n x\|_{H^2[0,\, l]} = O\left(\frac{1}{n^2}\right), \quad \text{si } x \in H^2[0,\, l].$$

27.25. Sea $X = L_2[0, l]$, $\overline{X}_n$ un espacio euclídeo de las columnas $\bar{x} = (x_i)_{i=1}^n$ con la norma

$$\|\bar{x}_n\|^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 (t_i - t_{i-1}).$$

Sea también

$$T_n x = \left\{ \frac{1}{t_i - t_{i-1}} \int_{t_{i-1}}^{t_i} x(s)\, ds \right\}_{i=1}^{n}.$$

Demostrar que:

a) los (T, I)-*splines* tienen la forma $S_n \bar{x}_n = \sum_{i=1}^{n} x_i \times \theta_i(t)$;

b) $\min_{x \in T_n^{-1}(\bar{x}_n)} \| x^2 \|^2_{L_2[0,\,l]} = \| \bar{x}_n \|^2_{\bar{X}_n}$.

27.26. En las condiciones del problema anterior demostrar que $T_n \in \mathcal{L}(X, \bar{X}_n)$, $\| T_n \| \leqslant 1$, $S_n \in \mathcal{L}(\bar{X}_n, X)$, $\| S_n \| = 1$, $S_n = (T_n)_r^{-1}$, $P_n = S_n T_n$ son proyectores y $\| P_n x - x \| = O(1/n)$ $(n \to \infty)$ cuando $x \in H^1_{[0,\,l]}$.

§ 28. Esquemas aproximados de Galiorkin

Sean: X, Y, espacios de Banach; A, un operador lineal con $D(A) \subset X$, $R(A) \subset Y$. Para hallar la solución aproximada de la ecuación $Ax = y$ $(y \in R(A))$ se dan dos sucesiones de subespacios $X_n \subset D(A)$, $Y_n \subset Y$ y *dos sucesiones de proyectores* P_n y Q_n, $P_n X = X_n$, $Q_n Y = Y_n$. Una sucesión de ecuaciones aproximadas (*esquema de Galiorkin*) se da en la forma

$$Q_n A x_n = Q_n y, \quad x_n \in X_n.$$

Este es un caso particular del enfoque más general considerado en el § 26.

TEOREMA 28.1. *Sea que se cumplen las siguientes condiciones*:

a) $Q_n y \in R(Q_n A P_n)$, *es decir, los esquemas aproximados son solucionables*;

b) $P_n x \to x$ $(n \to \infty)$ *sobre cada solución exacta* x;

c) $Q_n y \to y$ $(n \to \infty)$;

d) $\| Q_n A x - Q_n A P_n x \| \to 0$ $(n \to \infty)$ *sobre cada solución exacta* x, *es decir, se cumple la condición de aproximación*;

e) $\| Q_n A x_n \| \geqslant \gamma \| x_n \|$ *para cada* $x_n \in X_n$ *y cada* $n \in \mathbf{N}$, *donde* γ *es una constante positiva, o sea, se cumple la condición de estabilidad.*

Entonces, las soluciones exacta y aproximadas son únicas, el esquema de Galiorkin converge y es cierta la estimación

$$\| x_n - x \| \leqslant \| P_n x - x \| + \gamma^{-1} \| Q_n A x - Q_n A P_n x \|.$$

Sean: X_n, Y_n, subespacios n-dimensionales; $\{\varphi_i^{(n)}\}_{i=1}^n$ una base en X_n; $\{\gamma_i^{(n)}\}_{i=1}^n$, un sistema de funcionales lineales biortogonal a esta base. Entonces el operador P_n puede definirse de la forma

$$P_n x = \sum_{i=1}^{n} \langle x, \gamma_i^{(n)} \rangle \varphi_i^{(n)}.$$

De modo análogo, sean: $\{z_k^{(n)}\}_{k=1}^n$, una base en Y_n; $\{\psi_k^{(n)}\}_{k=1}^n$; un sistema de funcionales lineales biortogonal a esta base; entonces

$$Q_n y = \sum_{k=1}^{n} \langle y,\ \psi_k^{(n)} \rangle\ z_k^{(n)}.$$

Buscando la aproximación de Galiorkin x_n en la forma

$$x_n = \sum_{i=1}^{n} \xi_i^{(n)} \varphi_i^{(n)}$$

y poniéndola en la ecuación aproximada obtenemos el sistema de ecuaciones lineales

$$\sum_{i=1}^{n} \langle A\varphi_i^{(n)},\ \psi_k^{(n)} \rangle\ \xi_i^{(n)} = \langle y,\ \psi_k^{(n)} \rangle, \quad k = 1,\ 2,\ \ldots,\ n,$$

para determinar $\xi_1^{(n)},\ \ldots,\ \xi_n^{(n)}$.

Señalemos un importante caso particular cuando X_n y Y_n son capas lineales de los primeros n vectores de los sistemas $\{\varphi_i\}_{i=1}^{\infty}$ y $\{z_k\}_{k=1}^{\infty}$, respectivamente. Entonces, los sistemas $\{\gamma_i\}_{i=1}^{\infty}$ y $\{\psi_k\}_{k=1}^{\infty}$ también pueden escogerse de modo que no dependan de n.

28.1. Sea $x_n \in X_n$ $(n \in \mathbf{N})$. La designación $x_n \xrightarrow{P} x$ $(n \to \infty)$ significa que $\| x_n - P_n x \| \to 0$ cuando $n \to \infty$. Demostrar que si $x_n \xrightarrow{P} x$, $y_n \xrightarrow{P} y$ $(n \to \infty)$ para cualesquiera escalares α, β se tendrá $\alpha x_n + \beta y_n \xrightarrow{P} \alpha x + \beta y$.

28.2. Un punto $x \in X$ se denomina *punto P-límite* de una sucesión de subespacios X_n, $X_n = P_n X$ $(n \in \mathbf{N})$ si $P_n x \to x$ cuando $n \to \infty$. Sea x punto P-límite de la sucesión X_n. Demostrar que para que la sucesión x_n P-converja hacia x es necesario y suficiente que x_n converja hacia x en el espacio X.

28.3. Si todo elemento $x \in X$ es un punto P-límite de una sucesión X_n, entonces la sucesión de subespacios X_n se llama densa al límite en el espacio X. Demostrar que si la sucesión X_n es densa al límite en X, las concepciones de P-convergencia y de convergencia coinciden en X.

28.4. Sean

$$P_n x = \sum_{i=1}^{n} \langle x,\ \gamma_i^{(n)} \rangle\ \varphi_i^{(n)}, \quad Q_n y = \sum_{k=1}^{n} \langle y,\ \psi_k^{(n)} \rangle\ z_k^{(n)},$$

donde los sistemas $\{\varphi_i^{(n)}\}_{i=1}^n$ y $\{\gamma_i^{(n)}\}_{i=1}^n$, $\{z_k^{(n)}\}_{k=1}^n$ y $\{\psi_k^{(n)}\}_{k=1}^n$ son biortogonales. Demostrar que $P_n^2 = P_n$, $Q_n^2 = Q_n$.

28.5. Sean: $\omega_n > 0$; $\| Q_n \| \leqslant \omega_n$; $A \in \mathcal{L}(X, Y)$, y x es el punto P-límite de una sucesión de subespacios X_n, además, $\| x - P_n x \| = o(\omega_n^{-1})$ cuando $n \to \infty$. Demostrar que la condición de aproximación se cumple sobre el elemento x.

28.6. Sea que existen sistemas linealmente independientes $\varphi_i \in D(A)$, $\psi_j \in D(A^*)$ $(i, j \in \mathbf{N})$ tales, que $A\varphi_i$, $\psi_j = \delta_{ij}$ $(i, j \in \mathbf{N})$. Hagamos

$$P_n x = \sum_{i=1}^{n} \langle x, A^* \psi_i \rangle \varphi_i,$$

$$Q_n y = \sum_{i=1}^{n} \langle y, \psi_i \rangle A\varphi_i.$$

(El esquema obtenido se denomina *esquema de cuadrados mínimos*. Demostrar que en este caso $\| Q_n A x - Q_n A P_n x \| = 0$ para cualquier $x \in D(A)$, es decir, la condición de aproximación se cumple exactamente.

28.7. Sea $A = A_1 + A_2$, además, para cada uno de los operadores A_1, A_2 se cumple la condición de aproximación. Demostrar que ella se cumple también para el operador A.

28.8. Sea que para cualquier $x \in D(A)$ se cumple la desigualdad $\| Ax \| \geqslant \alpha \| x \|$ y que para cualquier sucesión $y_n \in AX_n$ se cumple la desigualdad $\| Q_n y_n \| \geqslant \beta \| y_n \|$ donde α, β, son constantes positivas. Demostrar que la aproximación de Galiorkin es estable con la constante $\gamma = \alpha\beta$.

28.9. Sea que un operador A actúa en un espacio de Hilbert real H y para cualquier $x \in D(A)$ se cumple la desigualdad $(Ax, x) \geqslant \gamma (x, x)$ donde $\gamma > 0$ es una constante. Demostrar que $(P_n A x_n, x_n) \geqslant \gamma \| x_n \|^2$ para cualquier sucesión $x_n \in X_n$. Deducir de aquí la estabilidad de la aproximación de Galiorkin.

28.10. Sea que en el esquema de cuadrados mínimos (problema 28.6) $D(A)$ es denso en X y que para cualquier $x \in D(A)$ se cumple la desigualdad $\| Ax \| \geqslant \gamma \| x \|$ donde γ es una constante positiva. Demostrar la estabilidad de este esquema.

28.11. Demostrar que en las condiciones del problema 28.10 para el esquema de cuadrados mínimos es válida la estimación

$$\| x_n - x \| \leqslant \gamma^{-1} \| Q_n y - y \|$$

y, por consiguiente, el esquema converge cuando $Q_n y \to y$ $(n \to \infty)$.

28.12. Sean: H, un espacio de Hilbert, y A: $H \to H$, un operador lineal con $D(A)$, denso en H. Verificar que sobre la solución de la ecuación $Ax = y$ se realiza el mínimo de la funcional

$$\varphi(x) = \| Ax - y \|^2.$$

28.13. En las condiciones del problema 28.12, sea φ_i $(i \in \mathbf{N})$ un sistema linealmente independiente en H. Buscaremos la solución aproximada $x_n = \sum_{i=1}^{n} c_i \varphi_i$ partiendo de la exigencia

$$\varphi(x_n) = \| \sum_{i=1}^{n} c_i A\varphi_i - y \|^2 = \text{mín}.$$

Escribir el sistema de ecuaciones para $c_1, c_2, \ldots, c_n$. Demostrar que este método (*método de Rits*) lleva al esquema de cuadrados mínimos.

28.14. Sean X_n, Y_n, subespacios n-dimensionales. Demostrar que de la estabilidad del esquema de Galiorkin se deduce la resolubilidad unívoca de ecuaciones aproximadas.

28.15. Sean: X, Y, espacios de Hilbert; $P_n Q_n$, operadores de proyección ortogonal; $P_n x = \sum_{i=1}^{n} (x, \varphi_i)\, \varphi_i$; $Q_n y = \sum_{i=1}^{n} (y, \psi_i)\, \psi_i$. Demostrar que la condición de estabilidad puede escribirse de la forma

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} \xi_i \xi_j \geqslant \gamma \sum_{h=1}^{n} \xi_h^2$$

Calcular los coeficientes $c_{ij} = i,\ j = 1, 2, \ldots, n)$.

28.16. Sea que el operador $A = A_1 + A_2$ actúa en un espacio de Hilbert real H, además, para cualquier $x \in D(A)$ son válidas las igualdades $(A_1 x, x) \geqslant \gamma_1 \| x \|^2$, $(A_2 x, x) \geqslant \gamma_2 \| x \|^2$, donde γ_1, γ_2 son constantes, $\gamma_1 + \gamma_2 > 0$. Demostrar que para el operador A se cumple la condición de estabilidad (según Galiorkin).

28.17. En el espacio $H = L_2[0, 1]$ consideremos el operador $Ax = -\frac{d^2x}{dt^2}$ con campo de definición $D(A)$ compuesto por funciones $x(t)$ que son dos veces continuamente diferen-

ciables sobre [0, 1] y satisfacen las condiciones de frontera $x(0) = x(1) = 0$. En H escojamos un sistema de elementos $\varphi_k = \psi_k = \sqrt{2}\ \text{sen}\ k\pi t$ ($k \in \mathbb{N}$), de coordenadas y de proyección simultáneamente, entonces

$$Q_n x = P_n x = \sum_{k=1}^{n} (x, \varphi_k)\, \varphi_k$$

Demostrar que:

a) $\| P_n \| = 1$;

b) $P_n A x = \sum_{k=1}^{n} k^2\pi^2 (x, \varphi_k)\, \varphi_k = A P_n x$, de donde $P_n A P_n x - P_n A x = 0$ para todos los $x \in D(A)$, es decir, se cumple la condición de la aproximación de Galiorkin.

28.18. En el espacio $L_2[0, 1]$ consideremos el operador $Ax(t) = c(t)\, x(t)$, donde $c(t)$ es una función continua sobre $[0, 1]$. Definamos $P_n = Q_n$ como en el problema 28.17. Empleando el problema 28.6 demostrar que para el operador A se cumple la condición de la aproximación de Galiorkin.

28.19. Sea $A = A_1 + A_2$, donde el operador A_1 está definido en el problema 28.17 y el operador A_2 en el problema 28.18. Empleando el problema 28.7 verificar que para el operador A se cumple la condición de la aproximación de Galiorkin.

28.20. Sea A el operador diferencial definido en el problema 28.17.

a) Demostrar que para cualquier $x \in D(A)$ se cumple

$$(Ax, x) = \int_0^1 x'^2(t)\, dt.$$

b) Empleando el problema 22.19, demostrar que para cualquier A se cumple la desigualdad $(Ax, x) \geqslant \pi^2 (x, x)$.

c) Empleando el problema 28.9, demostrar que para el operador A se cumple la condición de estabilidad.

28.21. Sea A el operador definido en el problema 28.18, además, en todo el $[0, 1]$ se cumple la desigualdad $c(t) \geqslant \alpha$. Demostrar que para el operador A se cumple la condición $(Ax, x) \geqslant \alpha (x, x)$.

28.22. Demostrar que para el operador $A = A_1 + A_2$, donde A_1 se ha definido en el problema 28.17 y A_2 en el problema 28.21, además, $\alpha > -\pi^2$, se cumple la condición de estabilidad.

28.23. S a $y(t)$ una función continua sobre $[0, 1]$. Consideremos el problema de contorno

$$-x'' + c(t)\,x = y,\quad x(0) = x(1) = 0.$$

Sea $\varphi_k = \psi_k = \sqrt{2}\,\operatorname{sen} k\pi t$ $(k \in \mathbf{N})$.

a) Demostrar que las aproximaciones de Galiorkin de la solución de este problema tienen la forma

$$x_n(t) = \sum_{k=1}^{n} \xi_k \varphi_k(t),$$

donde los coeficientes $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ se determinan por el sistema de ecuaciones lineales

$$(k\pi)^2 \xi_k + \sum_{i=1}^{n} c_{ik}\xi_i = \eta_k,\quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

b) Hallar las expresiones para c_{ik} y η_k $(i, k = 1, 2, \ldots, n)$.

28.24. Empleando los problemas 28.17—28.23, comprobar que para el problema de contorno 28.23, se cumplen las condiciones del teorema sobre la convergencia del esquema de Galiorkin. Estimar la velocidad de convergencia de la aproximación de Galiorkin hacia la solución exacta.

28.25. Sean $A \in \mathcal{L}(X, Y)$, $Q_n A P_n$, operadores continuamente invertibles, y que para $n \in \mathbf{N}$ se cumple la desigualdad

$$\| (Q_n A P_n)^{-1} \| \leqslant \gamma.$$

a) Demostrar que la condición de estabilidad de Galiorkin se ha cumplido.

b) Sea A continuamente invertible y sea que la solución exacta x es el punto P-límite, y que $\| Q_n \| \leqslant c$. Demostrar que la condición de la aproximación de Galiorkin se cumple y es válida la estimación

$$\| x_n - x \| \leqslant \gamma c \| A \| \| P_n x - x \|.$$

28.26. Sean: $Y = X$; $A = I - K$; $K \in \mathcal{L}(X)$; $Q_n = P_n$. Supongamos que los operadores $I_n - P_n K P_n$, donde I_n es un operador idéntico en $P_n X$, son continuamente invertibles y que para cualquier $n \in \mathbf{N}$ es cierta la desigualdad

$$\| (I_n - P_n K P_n)^{-1} \| \leqslant \gamma.$$

Demostrar la estabilidad del esquema de Galiorkin.

28.27. En las condiciones del problema anterior, sea que los operadores $I - K$ e $I - P_n K$ $(n \in \mathbf{N})$ son continuamente

invertibles y que para cualquier $n \in \mathbf{N}$ se cumple la desigualdad

$$\| P_n K - K \| \leqslant q \| (I - K)^{-1} \|^{-1},$$

donde $q \in (0, 1)$. Demostrar la estabilidad del esquema de Galiorkin con

$$\gamma = \frac{\| (I - K)^{-1} \|}{1 - q}.$$

28.28. En las condiciones del problema 28.26 sea que $P_n K \to K$ cuando $n \to \infty$ y $P_n x \to x$ cuando $n \to \infty$. Demostrar que:

a) para el esquema de Galiorkin se cumplen las condiciones de aproximación y estabilidad;

b) se cumple la desigualdad $\| x_n - x \| \leqslant \gamma \| P_n x - x \|$.

28.29. Dadas las condiciones del problema 28.26, sea que cuando $n \to \infty$, $P_n K \to K$, $P_n y \to y$. Demostrar que es correcta la estimación

$$\| x_n - x \| \leqslant \gamma \| P_n y - y \| + \gamma \| (I - K)^{-1} \| \times \\ \times \| P_n K - K \| \| y \|.$$

28.30. En el espacio $L_2 [0, 1]$ consideremos el operador integral

$$Kx = \int_0^1 K(t, s)\, x(s)\, ds,$$

donde

$$K(t, s) = \frac{4 - s^2}{4 - 4s \cos \pi t + s^2}.$$

En $L_2 [0, 1]$, elegimos el sistema de coordenadas $\varphi_k = \sqrt{2} \cos k\pi t$ $(k \in \mathbf{N})$ y construyimos los proyectores

$$P_n x = \sum_{k=1}^{n} (x, \varphi_k)\, \varphi_k.$$

Demostrar que $P_n K \to K$, cuando $n \to \infty$.

28.31. En el espacio $L_2 [0, 1]$ consideremos la ecuación integral de Fredholm de segunda especie

$$x(t) - \int_0^1 K(t, s)\, x(s)\, ds = y(t).$$

En $L_2[0, 1]$, elegimos el sistema de coordenadas $\varphi_k(t)$ $(k \in \mathbf{N})$.

a) Escribir el sistema para calcular los coeficientes de la aproximación de Galiorkin.

b) Para el caso considerado en el problema 28.30, demostrar la convergencia del esquema de Galiorkin.

28.32. En el espacio $C[0, 1]$, consideremos la ecuación integral del problema anterior con $y(t) \in C[0, 1]$ y el núcleo $K(t, s)$, continuo para $0 \leqslant t, s \leqslant 1$. Hagamos

$$P_n x = Q_n x = \sum_{i=0}^{n} \xi_i \omega_i(t),$$

donde las funciones $\omega_i(t)$ fueron definidas en el problema 27.8.

a) Escribir el sistema de ecuaciones para determinar los coeficientes $\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_n$.

Sea $\max\limits_{t, s \in [0, 1]} |K(t, s)| = k < 1/2$. Demostrar que para $n > \frac{2k}{1-2k}$ las ecuaciones aproximadas son unívocamente resolubles y el esquema de Galiorkin es estable.

c) Demostrar la convergencia del esquema de Galiorkin.

28.33. Sobre el segmento $[0, l]$ consideremos el problema de Cauchy

$$Ax = x' + c(t)\, x = y(t), \quad x(0) = 0$$

con $D(A) \subset H^1[0, l]$, un espacio de funciones de $H^1[0, l]$ que satisfacen la condición inicial $x(0) = 0$, y con $R(A) = L_2[0, 1]$ (se supone que $c(t) \in C[0, l]$. Para una red uniforme sobre $[0, l]$ con paso τ introducimos los proyectores

$$P_n x = \sum_{i=0}^{n} x(t_i)\, \omega_i(t),$$

$$Q_n y = \sum_{i=1}^{n} \left(\int_{t_{i-1}}^{t_i} y(s)\, \theta_i(s)\, ds \right) \theta_i(t),$$

donde $\omega_i(t)$ $(i = 0, 1, \ldots, n)$ son funciones básicas del subespacio de los splines lineales (problemas 27.8), y $\theta_i(t)$ es la función característica del segmento $[t_{i-1}, t_i]$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$.

a) Calcular $(A\omega_i, \theta_j)$, (y, θ_j) y escribir el sistema para determinar los coeficientes $\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_n$ de la aproximación

de Galiorkin

$$x_n = \sum_{i=0}^{n} \xi_i \omega_i (t).$$

b) Demostrar que para $\tau \| c \|_{C[0, l]} < 1$ existe a una sola aproximación de Galiorkin.

c) Para investigar la convergencia hagamos $z = x - x_n$. Demostrar que z es la solución del problema de Cauchy

$$z' + c(t) z = \hat{f}(t), \quad z(0) = 0,$$

donde $\hat{f}(t) \in L_2[0, l]$ y $Q_n \hat{f} = 0$. Empleándolo, demostrar que si $f \in L_2[0, l]$, entonces

$$\| z \|_{H^1[0, l]} = O(\tau^{3/2})$$

cuando $\tau \to 0$, y si $f(t)$ es también acotada, entonces

$$\| z \|_{H^1[0, l]} = O(\tau^2)$$

cuando $\tau \to 0$.

§ 29. Método de operadores monótonos

Sean: X, un espacio normado separable real; X^*, un espacio conjugado de X; A: $X \to X^*$, un operador no lineal con $D(A) = X$ y $R(A) \subset X^*$.

El operador A se llama monótono si para cualesquiera x, $y \in X$ se cumple la desigualdad $\langle x - y, A(x) - A(y) \rangle \geqslant 0$. Si para $x \neq y$ tiene lugar una desigualdad estricta, el operador A se denomina *estrictamente monótono*. Si, además, existe una función $c(t)$, continua y no negativa para $t \geqslant 0$, y tal que $c(0) = 0$, $c(t) > 0$ para $t > 0$, $c(t) \to \infty$ cuando $t \to \infty$, y tal que es válida la desigualdad $\langle x - y, A(x) - A(y) \rangle \geqslant c(\| x - y \|) \cdot \| y - x \|$, entonces, el operador A se denomina *fuertemente monótono*. El operador A se denomina *coercitivo* si existe una función $\gamma(t)$ que está definida para $t \geqslant 0$ y tiende a $+\infty$ cuando $t \to \infty$ y es tal, que para cualquier $x \in X$ se cumple la desigualdad $\langle x, A(x) \rangle \geqslant \gamma(\| x \|) \times \| x \|$. El operador A se llama *demicontinuo* en un punto $x_0 \in X$ si de $x_n \to x_0$, según la norma de X, se deduce que $A(x_n) \to A(x_0)$ ($n \to \infty$) débilmente, es decir, $\langle x, A(x_n) \rangle \to \langle x, A(x_0) \rangle$ ($n \to \infty$) para cualquier $x \in X$.

TEOREMA 29.1. *Sea que un operador A aplica un espacio de Banach separable real X en el espacio X^* y es fuertemente mo-*

nótono y demicontinuo. Entonces, la ecuación $A(x) = y$ *tiene la única solución* x *para cualquier* $y \in X^*$.

En las condiciones del teorema 29.1 para hallar aproximadamente la solución $\hat{x}$ se aplica *el método de Galiorkin.* Sea X_n $(n \in \mathbf{N})$ una sucesión de subespacios n-dimensionales en X con base $\{\varphi_i^{(n)}\}_{i=1}^n$, densa al límite en X. La aproximación de Galiorkin

$$x_n = \sum_{i=1}^{n} \xi_i^{(n)} \varphi_i^{(n)}$$

se busca aquí del sistema de ecuaciones

$$\langle \varphi_k^{(n)},\ A(x_n) \rangle = \langle \varphi_k^{(n)},\ y \rangle, \quad k = 1,\ 2,\ \ldots,\ n.$$

TEOREMA 29.2. *En las condiciones del teorema 29.1 para cada* n *existe una única aproximación de Galiorkin* x_n *de la solución exacta* $\hat{x}$. Con esto $x_n \to \hat{x}$ $(n \to \infty)$ según la norma del espacio x. *Si* $\| A(u) - A(v) \| \leqslant K \| u - v \|$ *en una bola* S *que contiene todos los* x_n *y* $\hat{x}$, *es válida la estimación de la velocidad de convergencia*

$$\| x_n - \hat{x} \| \leqslant c^{-1}(K) \| x - P_n x \|,$$

donde $c(t)$ *es la función de la definición de un carácter monótono fuerte y* P_n *es un proyector sobre* X_n.

29.1. Sea que un operador $f(x)$, f: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ satisface la condición $(x - y)[f(x) - f(y)] \geqslant 0$ para cualesquiera x, $y \in \mathbf{R}$. Demostrar que f es un operador monótono.

29.2. Sea que un operador $f(x)$, f: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ satisface la condición $(x - y)[f(x) - f(y)] \geqslant \alpha [x - y]^2$ para cualesquiera x, $y \in \mathbf{R}$, donde $\alpha > 0$ es una constante. Demostrar que f es un operador fuertemente monótono.

29.3. Demostrar que la función $f(x) = x^3 + x + 1$ $(x \in \mathbf{R})$ define un operador fuertemente monótono en $\mathbf{R}$.

29.4. Sea que una función $f(x)$, f: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ es diferenciable sobre $\mathbf{R}$ y $f'(x) \geqslant \alpha$ sobre $\mathbf{R}$ donde α es una constante. Demostrar que f es un operador monótono para $\alpha \geqslant 0$ y fuertemente monótono para $\alpha > 0$.

29.5. Sea que para todos los $x = \{x_i\}_{i=1}^k \in E^k$ está definido el operador A: $E^k \to E^k$,

$$A(x) = \begin{pmatrix} f_1(x_1,\ \ldots,\ x_k) \\ \cdots\cdots\cdots \\ f_k(x_1,\ \ldots,\ x_k) \end{pmatrix}.$$

Verificar que si para cualesquiera $x \in E^h$ se cumple la desigualdad

$$\sum_{i=1}^{h} (x_i - y_i)\,[f_i(x_1, \ldots, x_h) - f_i(y_1, \ldots, y_h)] \geqslant$$

$$\geqslant c \sum_{i=1}^{h} |x_i - y_i|^2,$$

donde c es una constante, entonces el operador $A(x)$ es monótono para $c \geqslant 0$ y fuertemente monótono para $c > 0$.

29.6. Consideremos el operador $A(x)$ del problema 29.5 para $h = 2$. Sea que las funciones de coordenadas f_1 y f_2 en todo E^2 poseen derivadas parciales $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$ $(i, j = 1, 2)$ además, en todos los puntos de E^2 se cumplen las desigualdades

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_i} \geqslant \alpha, \quad i = 1, 2; \quad \left|\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right| \leqslant \beta, \quad i \neq j;\ i, j = 1, 2,$$

donde α, β son constantes. Demostrar que el operador $A(x)$ es monótono para $\beta \leqslant \alpha$ y estrictamente monótono con $c(t) = (\alpha - \beta)\,t$ para $\beta < \alpha$.

29.7. Demostrar que el operador $A: E^2 \to E^2$

$$A(x) = \begin{pmatrix} x_1^5 + 3x_1 - 2x_2 + 1 \\ 2x_2^7 + x_1 + 5x_2 - 4 \end{pmatrix}$$

es estrictamente monótono.

29.8. Sea un operador $A: X \to X^*$ fuertemente monótono. Demostrar que A es un operador coercitivo con $\gamma(t) = c(t) - \|A(0)\|$.

29.9. Demostrar que si un operador $A: X \to X^*$ es coercitivo, entonces $\langle x, A(x)\rangle \to +\infty$ cuando $\|x\| \to +\infty$.

29.10. Demostrar que si un operador $A: X \to X^*$ es coercitivo, entonces $\|A(x)\| \to +\infty$ cuando $\|x\| \to \infty$.

29.11. Sean: H, un espacio de Hilbert; $A: H \to H$, un operador con $D(A) = H$. Formular para A las definiciones de monotonía, monotonía fuerte y coerción.

29.12. Sea $A \in \mathcal{L}(H)$, además, para cualquier $x \in H$ se cumple desigualdad $(Ax, x) \geqslant \gamma(x, x)$ donde $\gamma > 0$ es una constante. Demostrar que A es fuertemente monótono y coercitivo.

29.13. Sea que un operador $f(x)$, $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ es continuo y monótono sobre $\mathbf{R}$ y $f(x) \to \infty$ cuando $x \to \infty$. Demostrar que la ecuación $f(x) = 0$ tiene al menos una solución en $\mathbf{R}$, y, además, si f es estrictamente monótono esta solución es única.

29.14. Comprobar que la función

$$f(x)=\begin{cases} x^3-5 & \text{para} \quad x<-1, \\ x+2 & \text{para} \quad -1\leqslant x\leqslant 1, \\ x^7+4 & \text{para} \quad x>1 \end{cases}$$

es monótona, tiende a $+\infty$ cuando $x \to +\infty$, pero es discontinua y la ecuación $f(x)=0$ no tiene soluciones.

29.15. Sea un operador f: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ continuo y fuertemente monótono. Demostrar que la ecuación $f(x)=0$ tiene solución única en $\mathbf{R}$.

29.16. Sea que una función de dos variables $f(x, t)$; f: $E^2 \to \mathbf{R}$ es continua sobre E^2 y para cualesquiera $x, y, t \in \mathbf{R}$ satisface la desigualdad

$$(x-y)[f(x, t)-f(y, t)] \geqslant c\,|x-y|^2,$$

donde $c>0$ es una constante que no depende de t. Demostrar que sobre $\mathbf{R}$ la ecuación $f(x, t)=0$ determina la única función implícita $x=\varphi(t)$, continua sobre $\mathbf{R}$.

29.17. Generalizar el resultado del problema 29.16 para el caso cuando $t \in G$, es un recinto cerrado o abierto en E^k.

29.18. Sea que una función $f(x, t)$, continua en E^2, satisface la desigualdad $f_x(x, t) \geqslant c>0$. Demostrar que es válida la afirmación del problema 29.16.

29.19. Sea que el operador $A(x)=\begin{pmatrix} f_1(x_1, x_2) \\ f_2(x_1, x_2) \end{pmatrix}$ es continuo para cualesquiera $x=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in E^2$ y satisface la condición de monotonía fuerte

$$(x_1-y_1)(f_1(x_1, x_2)-f_1(y_1, y_2))+(x_2-y_2)\times \\ \times (f_2(x_1, x_2)-f_2(y_1, y_2)) \geqslant \\ \geqslant c\,[(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2,$$

donde $c>0$ es una constante. Demostrar que para cualesquiera $x_1 \in \mathbf{R}$, la ecuación $f_2(x_1, x_2)=0$ tiene la solución única $x_2=\varphi(x_1)$ que es continua sobre $\mathbf{R}$.

29.20. En las condiciones del problema 29.19 consideremos un operador $A_1(x_1)=f(x_1, \varphi(x_1))$. Demostrar que A_1 es continuo y fuertemente monótono sobre $\mathbf{R}$.

29.21. En las condiciones del problema 29.19 demostrar que, en E^2, la ecuación $A(x)=0$ tiene solución única.

29.22. Sea un operador A: $E^k \to E^k$ continuo en E^k y fuertemente monótono para $c(t)=ct$ donde $c>0$. Emple-

ando el método de inducción matemática respecto a k, demostrar que la ecuación $A(x) = 0$ tiene solución única en E^h.

29.23. Sea un operador $A: E^h \to E^h$ continuo y monótono. Demostrar que para $c > 0$ el operador $A_c(x) = A(x) + cx$ es continuo y fuertemente monótono con $c(t) = ct$.

29.24. Sea que un operador $A: E^h \to E^h$ posee la siguiente propiedad: existe un $r > 0$ tal, que para todos los x con $\| x \| > r$ se cumple la desigualdad $(x, A(x)) \geqslant 0$. Demostrar que para $\| x \| > r$ es válida la desigualdad $(x, A_c(x)) > 0$ (el operador $A_c(x)$ fue definido en el problema 29.23).

29.25. Sea que un operador $A: E^h \to E^h$ es continuo, monótono y satisface la condición del problema 29.24. Demostrar que la ecuación $A(x) = 0$ tiene solución en E^h. Para esto, considerar operadores $A_n(x) = A(x) + \frac{1}{n}x$ y, empleando los resultados de los problemas 29.23 y 29.24, demostrar que:

a) para $n \in \mathbf{N}$ toda ecuación $A_n(x) = 0$ tiene la solución única x_n en E^h;

b) las soluciones x_n satisfacen la desigualdad $\| x_n \| \leqslant r$ $(n \in \mathbf{N})$;

c) existe una subsucesión x_{n_k} $(k \in \mathbf{N})$ de la sucesión x_n que converge hacia x_0, solución de la ecuación $A(x) = 0$.

En los problemas 29.26—29.38 sobre el segmento $[0, l]$ se considera el problema de contorno

$$\mathscr{L}x(t) - f(t, x(t)) = 0,$$

$$\mathscr{D}^h x(0) = \mathscr{D}^h x(l) = 0, \quad k = 0, 1, \ldots, m-1,$$

con la expresión diferencial formal $(m \geqslant 1)$

$$\mathscr{L}x(t) = \sum_{h=0}^{m} (-1)^h \mathscr{D}^h [P_h(t) \mathscr{D}^h x(t)].$$

Aquí $\mathscr{D} = \frac{d}{dt}$ es un operador de diferenciación, los coeficientes $P_h(t) \in C[0, l]$ $(k = 0, 1, \ldots, m)$ y la función $f(t, x)$ es continua en la franja $t \in [0, l]$, $x \in (-\infty, \infty)$.

Sea $\widetilde{H}^m[0, l]$ un espacio lineal de funciones m veces continuamente diferenciables sobre $[0, l]$ y con el producto

escalar

$$(x,\ y) = \int_0^l \Big[\sum_{i=0}^{m} x^{(i)}(t)\, y^{(i)}(t) \Big]\, dt,$$
$$(x^{(0)}(t) = x(t),\quad y^{(0)}(t) = y(t)).$$

La completación del espacio $\widetilde{H}^m[0,\ l]$ es un espacio de Hilbert llamado *espacio de Sóbolev* y designado por $H^m[0,\ l]$. Los elementos adjuntos a $\widetilde{H}^m[0,\ l]$ al completarlo, pueden identificarse con funciones del espacio $C^{m-1}[0,\ l]$ que tienen derivadas generalizadas. Es válida la afirmación sobre el encaje del espacio $H^m[0,\ l]$ en el espacio $C^{m-1}[0,\ l]$, análoga al teorema 4.1.

En el espacio $H^m[0,\ l]$ consideremos el subespacio

$$\mathring{H}^m[0,\ l] = \{x(t) \in H^m[0,\ l]:\ \mathscr{D}^k x(0) = \mathscr{D}^k x(l) = 0,\ k = 0,\ 1,\ \ldots,\ m-1\}.$$

Una función $x(t) \in \mathring{H}^m[0,\ l]$ se denomina *solución generalizada* del problema de contorno dada, si para cualquier $z \in \mathring{H}^m[0,\ l]$ se cumple la identidad integral

$$a(x,\ z) = \int_0^l \sum_{k=0}^{m} P_k(t)\, \mathscr{D}^k x(t)\, \mathscr{D}^k z(t)\, dt = \int_0^l f(t,\ x(t))\, z(t)\, dt.$$

29.26. Demostrar que para todo $x \in \mathring{H}^m[0,\ l]$, una expresión $a(x,\ z)$ es una funcional lineal acotada respecto a $z \in \mathring{H}^m[0,\ l]$ y, por consiguiente, se representa de la forma

$$a(x,\ z) = (\widetilde{x},\ z)_{H^m[0,\ l]} = (Ax,\ z)_{H^m[0,\ l]}$$

29.27. Demostrar que $A \in (\mathring{H}^m[0,\ l],\ \mathring{H}^m[0,\ l])$ donde el operador $Ax = \widetilde{x}$ fue definido en el problema anterior.

29.28. Sea que existe una constante $\alpha > 0$ tal, que para todos los $x \in \mathring{H}^m[0,\ l]$ se cumple la desigualdad

$$a(x,\ x) \geqslant \alpha \| x \|^2_{H^m[0,\ l]}.$$

Empleando el problema 29.12, demostrar que el operador A es fuertemente monótono.

29.29. Demostrar que para toda función $f(t) \in L_2[0, l]$

$$\int_0^l f(t)\, z(t)\, dt$$

es una funcional lineal acotada respecto a $z \in \mathring{H}^m[0, l]$ y, por consiguiente, existe una única función $y \in \mathring{H}^m[0, l]$ tal, que

$$\int_0^l f(t)\, z(t)\, dt = (y, z)_{H^m[0, l]}$$

29.30. En $\mathring{H}^m[0, l]$ consideremos la ecuación $Ax = y$, donde A e y fueron definidos en los problemas 29.26—29.29. Demostrar que en los supuestos del problema 29.28 esta ecuación tiene solución única, correspondiente a la solución generalizada del problema lineal inicial de contorno con $f(t, x) \equiv f(t)$.

29.31. Sea que $m = 1$, $P_1(t) \equiv 1$ y la norma en $\mathring{H}^1[0, l]$ está engendrada por el producto escalar

$$(x, y)_{\mathring{H}^m[0, l]} = \int_0^l x'(t)\, y'(t)\, dt.$$

Sean: $G(t, s)$, la función de Green para el operador de Sturm—Liouville $Ux = -x''$; $x(0) = x(l) = 0$. Demostrar que la ecuación introducida en el problema 29.30 es la siguiente ecuación integral lineal de Fredholm de segunda especie

$$x(t) + \int_0^l G(t, s) P_0(s)\, x(s)\, ds = \int_0^l G(t, s)\, f(s)\, ds.$$

29.32. Demostrar que si se cumplen las condiciones del problema 29.28, el producto escalar, en $H^m[0, l]$, puede darse mediante la fórmula

$$(x, z)_{H^m[0, l]} = a(x, z).$$

29.33. Empleando el problema 29.29 demostrar que el problema lineal inicial de contorno (para $f(t, x) \equiv f(t)$) tiene la única solución generalizada $x = y$, donde y es tal, que

$$\int_0^l f(t)\, z(t)\, dt = (y, z)_{H^m[0, l]}$$

29.34. Demostrar que para cada $x \in \mathring{H}^m [0, l]$, la expresión

$$\int_0^l f(t, x(t)) z(t) dt$$

es una funcional acotada respecto a $z \in \mathring{H}^m [0, l]$ y, por consiguiente, existe un único operador lineal $\Phi(x)$ que aplica $\mathring{H}^m [0, l]$ en sí y es tal, que

$$\int_0^l f(t, x(t)) z(t) dt = (\Phi(x), z)_{H^m[0, l]}.$$

29.35. Sea que en los supuestos del problema 29.28 para todos los $x_1, x_2 \in (-\infty, +\infty)$, $t \in [0, l]$ se cumple la desigualdad

$$[f(t, x_1) - f(t, x_2)](x_1 - x_2) \leqslant 0.$$

Demostrar que el operador $F(x) = A - \Phi(x)$ es fuertemente monótono y, por consiguiente, el problema de contorno tiene una única solución generalizada.

29.36. Sea H_n un subespacio n-dimensional en $\mathring{H}^m [0, l]$. Definamos la aproximación de Galiorkin $x_n \in H_n$ de la solución generalizada de un problema de contorno inicial, como una función que para cualquier $z_n \in H_n$ satisface la identidad integral

$$a(x_n, z_n) = (f(t, x_n), z_n)_{L_2[0, l]}$$

Demostrar que existe una única aproximación de Galiorkin x_n.

29.37. Sea $\{\varphi_k(t)\}_{k=1}^n$ una base en H_n. Demostrar que la identidad integral para

$$x_n = \sum_{i=1}^n \xi_i \varphi_i$$

es equivalente al siguiente sistema de ecuaciones:

$$\sum_{k=1}^n a(\varphi_k, \varphi_m) \xi_k = \left(f\left(t, \sum_{k=1}^n \xi_k \varphi_k\right), \varphi_m\right)_{L_2[0, l]}$$

$$m = 1, 2, \ldots, n.$$

29.38. Sea que $m = 1$, $f(t, x) \equiv f(t)$. Consideremos un subespacio de *splines* lineales que se anulan para $t = 0$ y $t = l$ (véase el problema 27.8). Hagamos

$$x_{n-1} = \sum_{k=1}^{n-1} \xi_k \omega_k(t).$$

a) Calcular $a(\omega_k, \omega_m)$ y $(y, \omega_m)_{L_2[0, l]}$ $(k, m = 1, 2, \ldots, n-1)$ para este caso.

b) Escribir el sistema de ecuaciones de Galiorkin para $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{n-1}$.

c) Demostrar la convergencia del esquema y estimar el orden de $\| x_n - x \|_{H^1[0, l]}$.

(En los problemas 29.37 y 29.38 la dependencia de las funciones básicas $\{\varphi_k(t)\}_{k=1}^n$ y de las coordenadas $\{\xi_k\}_{k=1}^n$ respecto a la dimensión n del subespacio H_n no se indica).

Capítulo 8

Elementos de la teoría de extremos y del análisis convexo

§ 30. Condiciones necesarias de extremo de una funcional

Sea $\varphi(x)$ una funcional en un espacio normado lineal real X, definida en un entorno S de un punto x_0. Se dice que $\varphi(x)$ alcanza un *mínimo (máximo) local* en el punto x_0, si existe un entorno $S_1 \subset S$ del punto x_0 tal, que $\varphi(x) \geqslant \varphi(x_0)$ ($\varphi x \leqslant \varphi(x_0)$) para todos los $x \in S_1$. Si $\varphi(x)$ alcanza un mínimo o un máximo locales, se dice que $\varphi(x)$ tiene un *extremo local* en el punto x_0.

Sea $F(x)$ un operador no lineal definido en un entorno S de un punto x_0 de un espacio de Banach X con valores en un espacio de Banach Y. Si para todos los $h \in X$ existe el límite

$$\lim_{t \to 0} \frac{F(x_0 + th) - F(x_0)}{t} = \delta F(x_0; h),$$

este límite se denomina *primera variación* del operador $F(x)$ en el punto x_0. Si $\delta F(x_0; h) \equiv Ah$, donde $A \in \mathcal{L}(X, Y)$, se dice que el operador F *es diferenciable en el punto* x_0 *en el sentido de Gateau* y $A = \varphi'(x_0)$.

TEOREMA 30.1. *Sea que una funcional* $\varphi(x)$, *definida en un entorno de un punto* x_0, *alcanza un extremo local en el punto* x_0 *y tiene primera variación* $\delta\varphi(x_0; h)$ *en este punto. Entonces* $\delta\varphi(x_0); h \equiv 0$.

COROLARIO. *Si en las condiciones del teorema* 30.1 *el espacio* X *es de Banach y la funcional* $\varphi(x)$ *es diferenciable en el sentido de Gateau (Fréchet), entonces* $\varphi'(x_0) = 0$.

En el cálculo de variaciones clásico en calidad de X se toma el espacio $\overset{\circ}{C}[t_0, t_1]$ de funciones $x(t)$ continuas sobre el segmento $[t_0, t_1]$ y que satisfacen las condiciones $x(t_0) = x(t_1) = 0$, o el espacio $\overset{\circ}{C}^n[t_0, t_1]$ de funciones $x(t)$, n veces continuamente diferenciables sobre $[t_0, t_1]$ y satisfacen las condiciones $x^{(k)}(t_0) = x^{(k)}(t_1) = 0$ $(k = 0, 1, \ldots$

$\ldots, n-1$). Al mismo tiempo se consideran las funcionales

$$\varphi(x) = \int_{t_0}^{t_1} F(t, x, x')\, dt, \tag{1}$$

$$\varphi(x, y) = \int_{t_0}^{t_1} F(t, x, y, x', y')\, dt, \tag{2}$$

$$\varphi(x) = \int_{t_0}^{t_1} F(t, x, x', x'', \ldots, x^{(n)})\, dt. \tag{3}$$

Un extremo de una funcional se denomina: *fuerte* si el entorno S_1, en el cual se cumple la desigualdad, se comprende en el sentido del espacio $\overset{\circ}{C}[t_0, t_1]$; *débil* si se comprende en el sentido del espacio $\overset{\circ}{C}^n[t_0, t_1]$ $(n \geqslant 1)$.

Si en (1)—(3) la función F es suficientemente suave, la condición necesaria de extremo que se desprende del teorema 30.1 tiene la forma:

para la funcional (1), de la *ecuación de Euler*

$$F'_x - \frac{d}{dt} F'_{x'} = 0, \tag{4}$$

para la funcional (2), del *sistema de ecuaciones de Euler*

$$\begin{cases} F'_x - \frac{d}{dt} F'_{x'} = 0, \\ F'_y - \frac{d}{dt} F'_{y'} = 0, \end{cases} \tag{5}$$

para la funcional (3), de la *ecuación de Euler—Poisson*

$$F'_x - \frac{d}{dt} F'_{x'} + \frac{d^2}{dt^2} F'_{x''} - \ldots + (-1)^n \frac{d^n}{dt^n} F'_x(n) = 0 \tag{6}$$

Una función o un par de funciones del espacio considerado que es solución de (4), (5) o (6) se denomina *extremal*; hablando en general, no se puede garantizar la existencia de una extremal.

Si el extremo de los funcionales (1), (2) o (3) se busca en la clase de funciones que satisfacen las condiciones de frontera no homogéneas

$$x(t_0) = x_0, \; x(t_1) = x_1 \tag{7}$$

o

$$x^{(k)}(t_0) = x_0^{(k)}, \; x^{(k)}(t_1) = x_1^{(k)}, \quad k = 0, 1, \ldots, n-1, \tag{8}$$

las condiciones necesarias (4) — (6) siguen siendo válidas y la extremal que satisface una de las respectivas ecuaciones (4) — (6), debe, cumplir también las condiciones (7) o (8).

Sea que una curva $x = x(t)$ es la solución de un *problema varicional con fronteras movibles*, es decir, realiza un extremo de la funcional

$$\varphi(\gamma) = \int_{\gamma} F(t, x, x')\, dt$$

entre todas las curvas γ de la clase C^1 que unen puntos arbitrarios de dos curvas suaves dadas $x = f_1(t)$ y $x = f_2(t)$. Del teorema 30.1 se desprende que para hallar extremales en el problema con fronteras movibles es necesario:

1) componer y resolver la ecuación de Euler (4), obteniendo una familia de extremales $x = f(t, C_1, C_2)$ que depende de los dos parámetros C_1 y C_2;

2) de las *condiciones de transversalidad*

$$[F + (f_1' - x') F_{x'}']|_{t=t_0} = 0,$$
$$[F + (f_2' - x') F_{x'}']|_{t=t_1} = 0$$

y de las ecuaciones $f(t_0, C_1, C_2) = f_1(t_0)$, $f(t_1, C_1, C_2) = f_2(t_1)$, determinar los puntos t_0, t_1 y las constantes C_1, C_2.

Sea que una curva γ realiza el extremo de la funcional

$$\varphi(x) = \int_{t_0}^{t_1} F(t, x, x')\, dt,$$

satisface las condiciones de frontera $x(t_0) = x_0$, $x(t_1) = x_1$ y es suave a trozos, es decir, puede tener un salto de la derivada (*punto angular*) en cierto punto τ ($t_0 < \tau < t_1$). Entonces, $F_{x'x'}''|_{t=\tau} = 0$ y del teorema 30.1 se desprende que, en el punto angular, la extremal debe satisfacer las *condiciones de Weierstrass—Erdmann*

$$\begin{gathered} F_{x'}'|_{t=\tau-0} - F_{x'}'|_{t=\tau+0} = 0, \\ (F - x'F_{x'}')|_{t=\tau-0} - (F - x'F_{x'}')|_{t=\tau+0} = 0 \end{gathered} \tag{9}$$

Sobre cada uno de los segmentos $[t_0, \tau]$ y $[\tau, t_1]$, la extremal debe satisfacer la ecuación de Euler (4). Las cuatro constantes arbitrarias surgidas al resolver (4), hablando en general, pueden determinarse de las condiciones de frontera, de las condiciones de continuidad de la extremal y de las condiciones (9).

Sea que una función $x = x(t)$ es solución de un problema isoperimétrico de extremo condicionado, es decir, realiza el extremo de la funcional

$$\varphi(x) = \int_{t_0}^{t_1} F(t,\ x,\ x')\, dt$$

para las condiciones de frontera $x(t_0) = x_0$, $x(t_1) = x_1$, y la condición

$$\psi(x) = \int_{t_0}^{t_1} G(t,\ x,\ x')\, dt = C.$$

Del teorema 30.1 se desprende que para determinar extremales en el problema isoperimétrico es necesario:

1) componer la funcional de Lagrange $L = \varphi + \lambda\psi$;

2) componer y resolver la ecuación de Euler (4) para la funcional L, obteniendo una familia de extremales $x = f(t,\ C_1,\ C_2,\ \lambda)$;

3) determinar las constantes C_1, C_2 y el parámetro λ de las condiciones de frontera y de la condición $\psi(x) = C$.

30.1. Demostrar que todo extremo fuerte de la funcional (1), es simultáneamente extremo débil.

30.2. En el espacio $\overset{\circ}{C}{}^1[0,\ \pi]$ consideremos la funcional

$$\varphi(x) = \int_0^{\pi} x^2 (1 - x'^2)\, dt,$$

a) Demostrar que $\varphi(x)$ alcanza un mínimo débil sobre la función $x \equiv 0$.

b) Tomando $x_n(t) = \frac{1}{\sqrt{n}} \operatorname{sen} nt$ $(n \in \mathbb{N})$, comprobar que, sobre la función $x(t) \equiv 0$, $\varphi(x)$ no alcanza un mínimo fuerte.

30.3. Demostrar que para la funcional

$$\varphi(x) = \int_{t_0}^{t_1} F(x,\ x')\, dt$$

la ecuación de Euler (4) puede escribirse de la forma

$$F - x'F'_{x'} = C,$$

siendo C una constante arbitraria.

30.4. En la clase de curvas suaves hallar las extremales de las funcionales:

a) $\varphi(x) = \int_0^1 (x^2 + x'^2 + 2xe^t)\,dt,\ x(0) = 0{,}5,\ x(1) = e;$

b) $\varphi(x) = \int_{-1}^0 (12tx - x'^2)\,dt,\ x(-1) = 1,\ x(0) = 0;$

c) $\varphi(x) = \int_1^2 (x'^2 + 2xx' + x^2)\,dt,\ x(1) = 1,\ x(2) = e;$

d) $\varphi(x) = \int_1^e (tx'^2 + xx')\,dt,\ x(1) = 0,\ x(e) = 1;$

e) $\varphi(x) = \int_0^1 xx'^2\,dt,\ x(0) = 1,\ x(1) = \sqrt[3]{4};$

f) $\varphi(x) = \int_0^\pi (4x\cos t + x'^2 - x^2)\,dt,\ x(0) = x(\pi) = 0;$

g) $\varphi(x) = \int_0^{2\pi} (x'^2 - x^2)\,dt,\ x(0) = x(2\pi) = 1;$

h) $\varphi(x) = \int_{t_0}^{t_1} [2tx + (t^2 + e^x)\,x']\,dt,\ x(t_0) = x_0,\ x(t_1) = x_1;$

i) $\varphi(x) = \int_0^1 (e^x + tx')\,dt,\ x(0) = 0,\ x(1) = x_1;$

j) $\varphi(x) = \int_0^{\pi/4} (x'^2 - x^2)\,dt,\ x(0) = 1,\ x\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2};$

k) $\varphi(x) = \int_0^1 (2e^x - x^2)\,dt,\ x(0) = 1,\ x(1) = e;$

l) $\varphi(x) = \int_1^2 x'(1 + t^2x')\,dt,\ x(1) = 3,\ x(2) = 1;$

m) $\varphi(x) = \int_0^2 \frac{\sqrt{1+x'^2}}{x}\,dt,\ x(0)=2,\ x(2)=0,\ x>0;$

n) $\varphi(x) = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{1+x'^2}\,dt,\ x(t_0)=t_0,\ x(t_1)=t_1.$

30.5. Hallar las extremales de las funcionales que contienen derivadas superiores:

a) $\varphi(x) = \frac{1}{2}\int_0^1 x''^2\,dt,\ x(0)=x(1)=0,\ x'(0)=0,$ $x'(1)=1;$

b) $\varphi(x) = \int_0^1 (x^2+2x'^2+x''^2)\,dt,\ x(0)=x(1)=0,\ x'(0)=$ $=1,\ x'(1)=-\operatorname{sh}1;$

c) $\varphi(x) = \int_{t_0}^{t_1} (x+x'')\,dt,\ x(t_0)=x_0,\ x(t_1)=x_1,\ x'(t_0)=$ $=x'_0,\ x'(t_1)=x'_1;$

d) $\varphi(x) = \int_{t_0}^{t_1} (x'^2+xx'')\,dt,\ x(t_0)=x_0,\ x(t_1)=x_1,\ x'(t_0)=$ $=x'_0,\ x'(t_1)=x'_1;$

e) $\varphi(x) = \int_{-e}^{e} \left(\frac{1}{2}x''^2+24x\right)dt,\ x(-e)=x(e)=x'(-e)=$ $x'(e)=0;$

f) $\varphi(x) = \int_0^{\pi/2} (x''^2-x^2+t^2)\,dt,\ x(0)=1,\ x\left(\frac{\pi}{2}\right)=0,$ $x'(0)=0,\ x'\left(\frac{\pi}{2}\right)=-1;$

g) $\varphi(x) = \int_{-1}^{0} (240x-x''^2)\,dt,\ x(-1)=1,\ x(0)=0,$ $x'(-1)=-4{,}5;\ x'(0)=0,\ x''(-1)=16,\ x''(0)=0;$

h) $\varphi(x) = \int_0^1 (x'^2 + x''^2)\,dt$, $x(0) = 0$, $x(1) = \operatorname{sh} 1$, $x'(0) = 1$, $x'(1) = \operatorname{ch} 1$.

30.6. Hallar extremales de las funcionales que dependen de varias funciones:

a) $\varphi(x, y) = \int_0^{\pi/4} (2y - 4x^2 + x'^2 - y'^2)\,dt$, $x(0) = 0$, $x\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$, $y(0) = 0$, $y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$;

b) $\varphi(x, y) = \int_{-1}^{1} \left(2tx - x'^2 + \frac{y'^3}{3}\right) dt$, $x(-1) = 2$, $x(1) = 0$, $y(-1) = -1$, $y(1) = 1$;

c) $\varphi(x, y) = \int_0^{\pi/2} (x'^2 + y'^2 - 2xy)\,dt$, $x(0) = 0$, $x\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$, $y(0) = 0$, $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$;

d) $\varphi(x, y) = \int_0^1 (x'^2 + y'^2 + 2x)\,dt$, $x(0) = 1$, $x(1) = 1{,}5$; $y(0) = 0$, $y(1) = 1$;

e) $\varphi(x, y) = \int_0^{\pi/2} (2xy - 2x^2 + x'^2 - y'^2)\,dt$, $x(0) = 0$, $x\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2$, $y(0) = 0$, $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$;

f) $\varphi(x, y) = \int_0^1 (x'^2 + y'^2)\,dt$, $x(0) = 0$, $x(1) = 1$, $y(0) = 0$, $y(1) = -3$.

30.7. Sea que las fronteras movibles para una funcional $\varphi(x)$ son dadas por las ecuaciones $t = a$ y $t = b$. Empleando el teorema 30.1 escribir la condición necesaria de extremo de

la funcional y hallar las extremales si:

a) $\varphi(x) = \int_0^{\pi/2} (x^2 - x'^2 - 2x \operatorname{sen} t)\, dt$;

b) $\varphi(x) = \int_4^{\pi/4} (x^2 - 2xx' - 16x^2)\, dt$.

30.8. Escribir la condición de transversalidad para la funcional

$$\varphi(x) = \int_{t_0}^{t_1} e^{\operatorname{arc\,tg} x'} \sqrt{1 + x'^2}\, dt,$$

si $x(t_0) = x_0$ y el punto (t_1, x_1) puede moverse por la curva $x = \psi(t)$.

30.9. Hallar las extremales de la funcional

$$\varphi(x) = \int_0^{\pi/4} (x^2 - x'^2)\, dt,$$

si $x(0) = 0$ y el otro punto de frontera puede moverse por la recta $t = \pi/4$.

30.10. Hallar extremales de la funcional

$$\varphi(x) = \int_0^{t_1} \frac{\sqrt{1 + x'^2}}{x}\, dt,$$

si $x(0) = 0$ y el punto (t_1, x_1) puede moverse:

a) por la recta $x = t - 5$;

b) por la circunferencia $(t - 9)^2 + x^2 = 9$.

30.11) Empleando los métodos del cálculo de variaciones hallar la distancia:

a) entre la parábola $y = x^2$ y la recta $x - y = 5$;

b) desde el punto A (1, 0) hasta la elipse $4x^2 + 9y^2 = 36$.

30.12. ¿Existen soluciones con puntos angulares en el problema de extremo de la funcional:

a) $\varphi(x) = \int_{t_0}^{t_1} (x'^2 + 2tx - x^2)\, dt$, $x(t_0) = x_0$, $x(t_1) = x_1$;

b) $\varphi(x) = \int_0^2 (x'^4 - 6x'^2)\, dt$, $x(0) = 0$, $x(2) = 0$?

30.13. Hallar la solución con un punto angular en el problema sobre el mínimo de la funcional:

a) $\varphi(x) = \int_0^2 x'^2 (x' - 1)^2 \, dt, \; x(0) = 0, \; x(2) = 1;$

b) $\varphi(x) = \int_0^4 (x' - 1)^2 (x' + 1)^2 \, dt, \; x(0) = 0, \; x(4) = 2.$

30.14. Hallar la solución con un punto angular en el problema sobre el mínimo de la funcional

$$\varphi(x) = \int_{-1}^{1} x^2 (1 - x'^2) \, dt, \; x(-1) = 0, \; x(1) = 1.$$

30.15. Hallar las extremales del problema isoperimétrico:

a) $\varphi(x) = \int_0^1 (x^2 + x'^2) \, dt, \; x(0) = 0{,}5, \; x(1) = e$ con la condición $\int_0^1 2xe^t \, dt = \frac{3e^2 - 1}{4}$;

b) $\varphi(x) = \int_0^1 (x'^2 + t^2) \, dt, \; x(0) = x(1) = 0$, con la condición $\int_0^1 x^2(t) \, dt = 2$;

c) $\varphi(x) = \int_0^1 x'^2 \, dt, \; x(0) = 1, \; x(1) = 6$, con la condición $\int_0^1 x \, dt = 3$;

d) $\varphi(x) = \int_0^1 x'^2 \, dt, \; x(0) = 0, \; x(1) = \frac{1}{4}$, con la condición $\int_0^1 (x - x')^2 dt = \frac{1}{12}$.

30.16. Entre las curvas de la longitud dada l, que unen los puntos $A\ (t_0, x_0)$ y $B\ (t_1, x_1)$, hallar la del centro de gravedad que se encuentra en la inferior.

30.17. Hallar la extremal en el problema isoperimétrico de extremo de la funcional

$$\varphi\ (x,\ y) = \int_0^1 (x'^2 + y'^2 - 4ty' - 4y)\ dt,$$

con la condición $\int_0^1 (x'^2 - tx' - y'^2)\ dt = 2$ y las condiciones de frontera $x\ (0) = 0,\ x\ (1) = 1,\ y\ (0) = 0,\ y\ (1) = 1$.

30.18. Hallar la extremal de la funcional

$$\varphi\ (x,\ y) = \int_0^1 (x'^2 + y'^2)\ dt$$

si existen la relación $x^2 + y^2 = R^2$ y las condiciones de frontera $x\ (0) = R,\ x\ (1) = 0,\ y\ (0) = 0,\ y\ (1) = R$.

30.19. Hallar la extremal de la funcional si existe la relación diferencial:

a) $\varphi\ (x,\ y) = \int_0^{\pi/4} \left(\frac{y^2}{2} - 2t^2x^2\right) dt,\ x\,(0) = 0,\ x\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1,$

con la condición $\frac{dx}{dt} = 2y - 4tx$;

b) $\varphi\ (x,\ y) = \frac{1}{2} \int_0^1 (x^2 + y^2)\ dt,\ x\ (0) = 0,\ \ x\ (1) = 1,$ bajo la condición $\frac{dx}{dt} = y - x$.

30.20. Sean: A, un operador autoconjugado en un espacio de Hilbert real H; $y \in H$, un elemento fijo dado. Demostrar que la condición necesaria de extremo de una funcional $\varphi\ (x)$ se reduce a la ecuación:

a) $Ax = y$, si $\varphi\ (x) = (Ax,\ x) - 2\ (x,\ y)$;

b) $x + Ax = y$, si $\varphi\ (x) = (Ax,\ x) + (x,\ x) - 2\ (x,\ y)$.

¿Qué se puede afirmar que estas ecuaciones son resolubles si A es un operador totalmente continuo?

30.21. Demostrar que el problema isoperimétrico para la funcional

$$\varphi(x) = \int_a^b [p(t)\, x'^2 + q(x)\, x^2]\, dt$$

con las condiciones de frontera $x(a) = x(b) = 0$ y la condición

$$\int_a^b x^2(t)\, dt = 1,$$

donde $p(t) \in C^1[a, b]$, $p(t) \geqslant 0$ sobre $[a, b]$, $q(t) \in C[a, b]$, $q(t) \geqslant 0$ sobre $[a, b]$, es equivalente al problema de las funciones propias del operador de Sturm—Liouville.

§ 31. Condiciones suficientes de extremo de una funcional

TEOREMA 31.1. *Sea una funcional* $\varphi(x)$ *dos veces continuamente diferenciable según Fréchet en un entorno* S *de un punto* x_0 *de un espacio de Banach* X *y* $\varphi'(x_0) = 0$. *Si existe un* $\alpha > 0$ *tal, que para cualquier* $h \in X$ *se cumple la desigualdad* $\varphi''(x_0)\, h^2 \geqslant \alpha \| h \|^2$ ($\varphi''(x_0)\, h^2 \leqslant -\alpha \| h \|^2$), *entonces* x_0 *es un punto mínimo (máximo) local de* $\varphi(x)$.

A continuación se considera la cuestión sobre las condiciones suficientes de extremo de la funcional

$$\varphi(x) = \int_{t_0}^{t_1} F(t, x, x')\, dt \qquad (1)$$

en el espacio $\overset{\circ}{C}{}^k[t_0, t_1]$ ($k \geqslant 0$).

Una familia de curvas $x = x(t, C)$ ($x \in C^1[a, b]$) forma un *campo propio* en una región (dominio) dada si una, y sólo una curva $x(t, C)$ de esta familia pasa por cada punto (t, x) de esta región. El coeficiente angular $p(t, x)$ de una tangente a la curva de la familia $x(t, C)$, que pasa por el punto (t, x), se denomina *pendiente del campo* en el punto (t, x). Una familia de curvas $x = x(t, C)$ forma un *campo central* en la región dada si las curvas de esta familia cubren toda la región, no se intersecan en esta región y parten de un punto (t_0, x_0) que se encuentra fuera de la región dada. El punto (t_0, x_0) se denomina *centro del haz* de curvas. Un campo, propio o cen-

tral, formado por una familia de extremales de cierto problema variacional se denomina *campo de extremales*.

Sea que una curva $x = x(t)$ representa una extremal de la funcional (1). Se dice que la extremal $x = x(t)$ *está incluida en el campo de extremales*, si se halla una familia de extremales $x = x(t, C)$ que forma un campo en el cual se encuentra la extremal $x = x(t)$ para un valor $C = C_0$, además, esta extremal no está situada en la frontera de la región dada en la que la familia $x = x(t, C)$ forma el campo. Si el haz de extremales con centro en el punto $A(t_0, x_0)$ en un entorno de la extremal $x = x(t)$, que pasa por el mismo punto, forma un campo, con esto se halla el campo central que incluye la extremal inicial $x = x(t)$. En este caso, como parámetro de la familia puede tomarse el coeficiente angular de la tangente a las curvas del haz en el punto $A(t_0, x_0)$.

Para que se alcance un mínimo débil sobre la extremal dada de la funcional (1), es necesario que se cumpla la condición $F''_{x'x'} \geqslant 0$ en todos los puntos de la extremal considerada (la condición $F''_{x'x'} > 0$ se denomina *condición de Legendre*).

La ecuación del tipo

$$\left(F''_{xx} - \frac{d}{dt} F''_{x'x'}\right) u(t) - \frac{d}{dt}\left(F''_{x'x'} u'(t)\right) = 0$$

se llama *ecuación de Jacobi* para la funcional (1). Si existe una solución de la ecuación de Jacobi que satisface la condición $u(t_0) = 0$ que no se anula en ningún punto del semintervalo $t_0 < t < t_1$, entonces el arco AB de la extremal, donde $A(t_0, x_0)$, $B(t_1, x_1)$, puede ser incluido en el campo contral de extremales con centro en el punto A.

Se denomina *función de Weierstrass* para la funcional (1) a la función

$$E(t, x, p, x') = F(t, x, x') - F(t, x, p) - (x' - p) F'_p(t, x, p),$$

donde $p(t, x)$ es la pendiente de extremales en el punto (t, x).

Para que la funcional (1) alcance un *extremo débil* sobre una curva C, es suficiente que se cumplan las condiciones siguientes:

1) la curva C es una extremal;

2) la extremal C puede ser incluida en el campo de extremales;

3) la función $E(t, x, p, x')$ no cambia el signo en todos los puntos (t, x), próximos a los puntos de la curva C, y,

para x', próximos a $p\ (t, x)$. El mínimo se realiza en el caso cuando $E \geqslant 0$, el máximo, cuando $E \leqslant 0$.

Si a la par con las condiciones 1) y 2) se cumple la condición

3°) la función $E\ (t, x, p, x')$ no cambia el signo en todos los puntos (t, x), próximos a los puntos de la curva C, ni para los valores arbitrarios de x', entonces, sobre la curva C se realiza un *extremo fuerte*, mínimo en el caso cuando $E \geqslant 0$ y máximo cuando $E \leqslant 0$.

31.1. Indicar los campos propio y contral de extremales de la funcional:

a) $\varphi\ (x) = \int\limits_0^a (x'^2 + x^2)\ dt,\ a > 0;$

b) $\varphi\ (x) = \int\limits_0^{\pi/4} (x'^2 - x^2 + t^2 + 4)\ dt.$

31.2. Examinar si la extremal de la funcional dada se incluye en el campo de extremales (propio o central):

a) $\varphi\ (x) = \int\limits_0^2 (x'^3 + \operatorname{sen}^2 t)\ dt,\ x\ (0) = 1,\ x\ (2) = 1;$

b) $\varphi\ (x) = \int\limits_0^2 (x'^3 + \operatorname{sen}^2 t)\ dt,\ x\ (0) = 0,\ x\ (2) = 4;$

c) $\varphi\ (x) = \int\limits_{-1}^1 x' \left(2t - \frac{1}{2} x'\right) dt,\ x\ (-1) = 0,\ x\ (1) = 0{,}5;$

d) $\varphi\ (x) = \int\limits_0^1 (x'^2 - 2tx)\ dt,\ x\ (0) = x\ (1) = 0;$

e) $\varphi\ (x) = \int\limits_0^1 (2e^t x + x'^2)\ dt,\ x\ (0) = 1,\ x\ (1) = e;$

f) $\varphi\ (x) = \int\limits_0^a (x^2 - x'^2)\ dt,\ x\ (0) = x\ (a) = 0,\ a > 0,\ a \neq k\pi,\ k \in \mathbf{N};$

g) $\varphi\ (x) = \int\limits_0^2 (x'^2 + t^2)\ dt,\ x\ (0) = 1,\ x\ (2) = 3?$

31.3. ¿Se cumple la condición de Jacobi para la extremal de la funcional que pasa por los puntos dados:

a) $\varphi(x) = \int_0^a (x'^2 + t^2)\, dt,\ x(0) = 0,\ x(a) = 3,\ a > 0;$

b) $\varphi(x) = \int_0^a [x'^2 - 4x^2 + e^{-t^2}]\, dt,\ x(0) = x(a) = 0,\ a > \frac{\pi}{2},\ a \neq \frac{2k+1}{2}\pi,\ k \in \mathbf{N};$

c) $\varphi(x) = \int_0^a (x'^2 + x^2 + t^2)\, dt,\ x(0) = x(a) = 0;$

d) $\varphi(x) = \int_0^a (x'^2 - x^2)\, dt,\ x(0) = x(a) = 0;$

e) $\varphi(x) = \int_{-1}^1 (12tx + x'^2 + t^2)\, dt,\ x(-1) = -2,\ x(1) = 0;$

f) $\varphi(x) = \int_0^1 (1 + x'^2)\, dt,\ x(0) = x(1) = 0;$

g) $\varphi(x) = \int_0^{2\pi} (x'^2 - x^2)\, dt,\ x(0) = 0,\ x(2\pi) = 1;$

h) $\varphi(x) = \int_0^1 (x'^2 + 9x^2 - 3t)\, dt,\ x(0) = x(1) = 0?$

31.4. Demostrar que si la función subintegral de la funcional (1) explícitamente no contiene x, cada extremal puede ser incluida en el campo de extremales.

31.5. Verificar el cumplimiento de la condición de Legendre para la extremal de la funcional que pasa por los puntos dados:

a) $\varphi(x) = \int_0^2 (x'^4 + x'^2)\, dt,\ x(0) = 1,\ x(2) = 5;$

b) $\varphi(x) = \int_{-1}^1 (t^2 x'^2 + 12x^2)\, dt,\ x(-1) = 1,\ x(1) = 1;$

c) $\varphi(x) = \int_0^1 (x'^2 - xx'^3)\, dt,\ x(0) = x(1) = 0;$

d) $\varphi(x) = \int_0^a x'^3\, dt,\ x(0) = 0,\ x(a) = b > 0,\ a > 0;$

e) $\varphi(x) = \int_0^1 (x'^2 - xx'^3)\, dt,\ x(0) = x(1) = 0;$

f) $\varphi(x) = \int_0^2 (6x'^2 - x'^4 + xx')\, dt,\ x(0) = 0,\ x(2) = 1;$

g) $\varphi(x) = \int_0^1 xx'^2\, dt,\ x(0) = 3,\ x(1) = 3;$

h) $\varphi(x) = \int_2^3 \frac{t^3}{x'^2}\, dt,\ x(2) = 4,\ x(3) = 9;$

i) $\varphi(x) = \int_1^2 (tx'^4 - 2xx'^3)\, dt,\ x(1) = 0,\ x(2) = 1.$

31.6. Examinar las funcionales para el extremo:

a) $\varphi(x) = \int_0^1 (x'^3 + x')\, dt,\ x(0) = 0,\ x(1) = 2;$

b) $\varphi(x) = \int_0^1 \left(t + 2x + \frac{1}{2}x'^2\right) dt,\ x(0) = x(1) = 0;$

c) $\varphi(x) = \int_0^2 (e^{x'} + 3)\, dt,\ x(0) = 0,\ x(2) = 1;$

d) $\varphi(x) = \int_0^1 e^t \left(x^2 + \frac{1}{2}x'^2\right) dt,\ x(0) = 1,\ x(1) = e;$

e) $\varphi(x) = \int_0^1 e^x x'^2\, dt,\ x(0) = 0,\ x(1) = \ln 4;$

f) $\varphi(x) = \int_{-1}^{2} x'(1 + t^2 x')\, dt,\ x(-1) = 1,\ x(2) = 1;$

g) $\varphi(x) = \int_{1}^{2} \frac{t^3}{x'^2}\, dt,\ x(1) = 1,\ x(2) = 4;$

h) $\varphi(x) = \int_{0}^{a} \frac{dt}{x'},\ x(0) = 0,\ x(a) = b > 0,\ a > 0,$

i) $\varphi(x) = \int_{0}^{1} (1 + t)\, x'^2\, dt,\ x(0) = 0,\ x(1) = 1;$

j) $\varphi(x) = \int_{-1}^{1} (x'^3 + x'^2)\, dt,\ x(-1) = -1,\ x(1) = 3;$

k) $\varphi(x) = \int_{0}^{\pi/4} (4x^2 - x'^2 + 8x)\, dt,\ x(0) = -1,\ x\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0;$

l) $\varphi(x) = \int_{1}^{2} (t^2 x'^2 - 12x^2)\, dt,\ x(1) = 1,\ x(2) = 8;$

m) $\varphi(x) = \int_{0}^{\pi/4} (x^2 - x'^2 + 6x \operatorname{sen} 2t)\, dt,\ x(0) = 0,\ x\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1;$

n) $\varphi(x) = \int_{0}^{2} (1 - e^{-x'^2})\, dt,\ x(0) = 0,\ x(2) = 1;$

o) $\varphi(x) = \int_{0}^{1} (x'^2 - x x'^3)\, dt,\ x(0) = x(1) = 0.$

31.7. En el espacio $C[0, 1]$ consideremos la funcional

$$\varphi(x) = \int_{0}^{1} x^2 (t - x)\, dt,$$

a) Demostrar que $x \equiv 0$ es la única extremal de $\varphi(x)$.

b) Hallar $d^2\varphi$ en el punto $x \equiv 0$ y comprobar que para cualquier incremento $h \in C\,[0,\ 1]$ $(h \neq 0)$ se cumple la desigualdad $d^2\varphi > 0$.

c) Comprobar que en cualquier entorno del punto $x \equiv 0$, $\varphi(x)$ puede tomar valores de diferentes signos y, por lo tanto, $x \equiv 0$ no es punto de extremo.

31.8. En el espacio l_2 para $x = (x_1, x_2, \ldots) \in l_2$ consideremos la funcional

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n^2}{n^3} - \sum_{n=1}^{\infty} x_n^4.$$

a) Demostrar que en el punto $x_0 = (0, g, \ldots)$ $\delta\varphi(x_0; h) \equiv 0$.

b) Hallar $d^2\varphi$ en el punto x_0 y comprobar que para cualquier incremento $h = (h_1, h_2, \ldots) \in l_2$ $(h \neq 0)$, se cumple la desigualdad $d^2\varphi > 0$.

c) Comprobar que en cualquier entorno del punto $x_0\varphi(x)$ puede tomar valores de diferentes signos y, por lo tanto, el punto x_0 no es punto de extremo.

31.9. En un espacio real de Hilbert H consideremos la funcional $\varphi(x) = \| x \|^2$. Empleando el teorema 31.1 demostrar que $\varphi(x)$ alcanza su mínimo en el punto $x = 0$.

§ 32. Funcionales convexas y semicontinuas

Una funcional real definida sobre un conjunto M de un espacio de Banach X se denomina:

convexa si M es convexo y para cualesquiera $x_1, x_2 \in M$ y cualquier $t \in [0,\ 1]$, se cumple la desigualdad $\varphi(tx_1 + (1 - t)\, x_2) \leqslant t\varphi(x_1) + (1 - t)\, \varphi(x_2)$;

semicontinua inferiormente, si de $x_n \to x_0$ cuando $n \to \infty$ $(x_n,\ x_0 \in M)$, $n \in \mathbf{N}$), se deduce que $\varphi(x_0) \leqslant \varliminf \varphi(x_n)$;

semicontinua débil e inferiormente, si de $x_n \to x_0$ $(n \to \infty)$ débilmente $(x_n,\ x_0 \in M,\ n \in \mathbf{N})$, se deduce que $\varphi(x_0) \leqslant \varliminf \varphi(x_n)$.

TEOREMA 32.1. *Una funcional semicontinua débil e inferiormente dada en un espacio de Banach reflexivo X es acotado inferiormente y alcanza su valor mínimo sobre cada conjunto acotado débilmente cerrado (convexo cerrado acotado) $M \subset X$.*

TEOREMA 32.2. *Sea una funcional $\varphi(x)$ diferenciable según Gateau en cada punto de un espacio de Banach X. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1) *$\varphi(x)$ es una funcional convexa;*

2) *el operador* $\varphi'(x)$ *es monótono*;

3) *para cualesquiera* $x, y \in X$ *se cumple la desigualdad* $\varphi(y) - \varphi(x) \geqslant \varphi'(x)(y - x)$.

COROLARIO. *Cada funcional convexa diferenciable según Gateau y dada en todo el espacio de Banach es semicontinua débil e inferiormente.*

32.1. Sea $\varphi(x)$ una funcional lineal sobre un espacio de Banach X. Demostrar que $|\varphi(x)|$ es una funcional convexa.

32.2. Sean: X, un espacio de Banach; $M \subset X$, un conjunto convexo; $\varphi(x)$, una funcional convexa definida sobre M y tal, que $\varphi(x) \geqslant 0$ para cualquier $x \in M$. Demostrar que $\varphi^2(x)$ es una funcional convexa.

32.3. Sea X un espacio de Banach; para $x \in X$ hacemos $\varphi(x) = \| x \|$. La funcional $\varphi(x)$, ¿será:

a) convexa;

b) continua;

c) débilmente continua;

d) semicontinua débil e inferiormente?

32.4. Sean: X, un espacio de Banach reflexivo; $M \subset X$, un conjunto convexo cerrado acotado. Demostrar que:

a) en M existe un elemento con norma mínima;

b) para cualquier $z \in X$ existe un $x \in M$ tal, que $\rho(z, M) = \| z - x \|$.

32.5. Sea que una funcional convexa $\varphi(x)$ está definida sobre un conjunto convexo M de un espacio de Banach X, $m = \inf\limits_{x \in M} \varphi(x)$. Demostrar que el conjunto $\{x \in M: \varphi(x) = m\}$ es convexo.

32.6. Sea $\varphi(x)$ una funcional convexa definida sobre un conjunto convexo M de un espacio de Banach X. Demostrar que cada punto del mínimo local de $\varphi(x)$ es el punto de su mínimo global.

32.7. Sea $\varphi(x)$ una funcional convexa definida sobre un espacio de Banach X. Demostrar que para cualquier número real λ, el conjunto $C_\lambda = \{x \in X: \varphi(x) \leqslant \lambda\}$ es convexo.

32.8. Sea $\varphi(x)$ una funcional en un espacio de Banach X tal, que para cualquier número real λ el conjunto $C_\lambda = \{x \in X: \varphi(x) \leqslant \lambda\}$ es convexo. ¿Se desprende de aquí que $\varphi(x)$ es una funcional convexa?

32.9. Demostrar que una funcional $\varphi(x)$ en un espacio de Banach X es semicontinua inferiormente (semicontinua débil e inferiormente) si, y sólo si, para cualquier número real el conjunto $C_\lambda = \{x \in X: \varphi(x) \leqslant \lambda\}$ es cerrado (débilmente cerrado) en X.

32.10. Demostrar que una funcional convexa en un espacio de Banach es semicontinua débil o inferiormente si, y sólo si, es semicontinuo inferiormente.

32.11. Demostrar que una funcional convexa semicontinua inferiormente dada en un espacio de Banach reflexivo X, alcanza su menor valor sobre cada conjunto convexo cerrado acotado $M \subset X$.

32.12. En el espacio $C[0, 1]$ consideremos el conjunto

$$M = \{x(t) \in C[0, 1]: |x(t)| \leqslant 1,\ x(0) = 0,\ x(1) = 1\}.$$

Para $x(t) \in C[0, 1]$ hacemos

$$\varphi(x) = \int_0^1 x^2(t)\, dt.$$

a) Demostrar que el conjunto M es acotado, cerrado y convexo.

b) Demostrar que $\varphi(x)$ es una funcional convexa continua.

c) ¿Alcanza $\varphi(x)$ su menor valor sobre M?

32.13. Demostrar que toda funcional semicontinua débil o inferiormente en un espacio de Banach, alcanza su menor valor sobre cada conjunto bicompacto.

32.14. En el espacio $L_2[0, 1]$ consideremos la funcional

$$\varphi(x) = \int_0^1 |x(t)|\, dt.$$

Demostrar que $\varphi(x)$ alcanza su menor valor sobre cada conjunto convexo cerrado acotado.

32.15. Sean: H, un espacio de Hilbert; $A \in \mathcal{L}(H)$, un operador autoconjugado; $\varphi(x) = (Ax, x)$. ¿Será la funcional:

a) continua;

b) débilmente continua;

c) semicontinua débil o inferiormente?

32.16. Demostrar que la funcional $\varphi(x)$ del problema anterior es convexa si, y sólo si, $A \geqslant 0$.

32.17. En el espacio l_2 para $x = (x_1, x_2, \ldots) \in l_2$ consideremos la funcional

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n^2}{n^2} - \sum_{n=1}^{\infty} x_n^4.$$

a) Demostrar que $\varphi(x)$ está definida sobre todo el espacio l_2 y es diferenciable.

b) ¿Será $\varphi(x)$ semicontinua débil o inferiormente?

32.18. Sean: X, un espacio de Banach reflexivo, $A \in \mathcal{L}(X, X^*)$, $\varphi(x) = \langle x, Ax \rangle$.

a) Demostrar que la funcional $\varphi(x)$ es diferenciable según Gateau y hallar su derivada.

b) Sea el operador A positivo, es decir, que para cualquier $x \in X$ se cumple la desigualdad $\langle x, Ax \rangle \geqslant 0$. Demostrar que $\varphi'(x)$ es un operador monótono.

c) Demostrar que para el operador positivo A la funcional $\varphi(x)$ alcanza su menor valor sobre cada conjunto convexo cerrado acotado $M \subset X$.

32.19. Sean: $\mathbf{H}$, un espacio de Hilbert, $A \in \mathcal{L}(H)$; $b \in H$, un elemento fijo dado. Para $x \in H$ hagamos $\varphi(x) = \| Ax - b \|^2$. Demostrar que $\varphi(x)$:

a) es diferenciable según Gateau y hallar su derivada;

b) alcanza su menor valor sobre cada conjunto convexo cerrado acotado $M \subset H$.

32.20. Sea que en las condiciones del problema anterior $H = E^2$ y, en una base ortonormalizada, el operador A se define por la matriz

$$A = \begin{Vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{Vmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

¿En qué punto alcanza su menor valor la funcional $\varphi(x)$ sobre la bola $\overline{S}_r(0)$ para distintos r?

Respuestas y sugerencias

Capítulo 1

§ 1.

1.12. La inclusión estricta es posible. 1.13. Hablando en general no se deduce. 1.17. Es posible. 1.25. No. Hagamos

$$x = \begin{Vmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \cdots \\ 0 \end{Vmatrix}, \qquad y = \begin{Vmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \cdots \\ 0 \end{Vmatrix};$$

entonces para $z = x/2 + y/2$ se infringe el axioma del triángulo. 1.26. $\alpha_m = 1/\sqrt{m}$, $\beta_m = 1$, $\gamma_m = 1/m$, $\delta_m = 1$, $\varepsilon_m = 1$, $\nu_m = \sqrt{m}$. 1.30. a), c), d).

$$x^{(n)} = \underbrace{0, 0, \ldots 0}_{2^n}, \frac{1}{(2^n+1)}, \frac{1}{(2^n+2)}, \cdots \frac{1}{(2^n+n)}, 0, 0, \ldots).$$

Entonces $x^{(n)} \to 0$ cuando $n \to \infty$ en los espacios m, l_2, c_0, pero diverge en el espacio l_1. b), c).

$$x^n = \Big(\underbrace{\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \ldots \frac{1}{n}}_{n^2}, 0, 0, \ldots\Big).$$

Entonces $x^{(n)} \to 0$ cuando $n \to \infty$ en los espacios c_0 y m, pero diverge en el espacio l_2. 1.32. Para c_0 y $\bar{l}_1$ establecer dos inclusiones contrarias. La inclusión $c_0 \subset \bar{l}_1$ se desprende del hecho de que es posible aproximar todo elemento del espacio c_0 sustituyendo «la cola» por ceros. La inclusión inversa surge de las propiedades de la convergencia uniforme. 1.33. a) Sí. b) No. 1.34. a) Sí. 1.37. En los cuatro casos, se puede. 1.38. a), d), e). Se puede. b), c). No se puede. 1.39. a) No. El complemento a éste no es cerrado. b) No. Es siempre denso en el espacio $C[a, b]$. 1.40. a) Sí. La demostración del carácter cerrado utiliza ora la propiedad de dimensión finita, ora la representación de polinomios mediante la fórmula de interpolación de Lagrange. b) No. La sucesión

de polinomios de grado n puede converger uniformemente hacia un polinomio de menor grado. 1.42. a) Sí, b) Sí. 1.44. Utilizar la continuidad uniforme. 1.45. La demostración emplea la inducción respecto a k. Sea $P(t)$ un polinomio tal, que

$$\| f' - P \|_{\substack{k-1 \\ C[a,\ b]}} < \frac{\varepsilon}{b-a+1}, \qquad Q(t) = f(a) + \int_a^t P(\tau)\, d\tau.$$

Cerciorarse de que

$$\| f - Q \|_{C^k[a,\ b]} < \varepsilon$$

1.46. a) Sí $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 < \infty$. b) Si a_n es una sucesión acotada. 1.48. Si existe un $\varepsilon \in \mathbf{R}$ ($\varepsilon > 0$) tal, que para cualquier $n \in \mathbf{N}$ se cumple la desigualdad $a_n > \varepsilon$. En caso contrario, el complemento al paralelepípedo no es cerrado. 1.50. Sea que $\sigma_1(0)$ contiene un segmento $[x, y]$, $x \neq y$. Comprobar que $\| x + y \| = \| x \| + \| y \|$. Por el contrario, si $\| x + y \| = \| x \| + \| y \|$, además, $x \neq 0$, $y \neq 0$ y no existe un $\lambda > 0$ tal, que $y = \lambda x$, entonces hagamos $a = x/\| x \|$, $b = y/\| y \|$. Comprobar que $[a, b] \subset \sigma_1(0)$. 1.51. Son estrictamente normados los espacios l_2 y $\widetilde{L}_2[0, 1]$. 1.52. $A \cap B$ y $A + B$. 1.53. No, ya que $A - A = A + (-A) \neq 0$. 1.54. Sí. 1.55. No. 1.58. a) No. b), c), d), e). Sí. 1.66. Sea L_2 de dimensión finita. La demostración emplea la inducción respecto a $n = \dim L_2$. 1.67. a), c), e), f), g), j) No. b), d), h), i) Sí. 1.68. b) No. Tomemos

$$x_n = (1, \underbrace{-1/n, -1/n, \ldots, -1/n}_{n}, 0, 0, \ldots);$$

entonces, cuando $n \to \infty$, $x_n \to x = (1, 0, 0, \ldots) \notin L$. 1.69. a) Sí. b) No. 1.72. Es posible. 1.73. En general, la afirmación contraria no es válida. 1.78. En el problema 1.22, sólo el espacio m no es separable; en el problema 1.23, los espacios $M[a, b]$ y $V[a, b]$ tampoco lo son. 1.81. No. En el espacio l_2 consideremos la sucesión

$$x_n = (\underbrace{0, 0, \ldots, 0}_{n}, 1 + 1/n, 0, 0, \ldots)$$

y el elemento $x = (0, 0, \ldots, 0, \ldots)$. 1.83. a), b) En general, no. Considerar $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = 1/(1 + x^2)$. 1.88. Emplear los problemas 1.87 y 1.85. 1.89. c) En general, no. 1.91. No. Sea $x_n = \operatorname{sen} nt/n \in L$. Entonces, $x_n \to 0$ cuando $n \to \infty$, pero $f(x_n) \not\to 0$. 1.92. a) Sí. b) No. Tomemos

$$x_n(t) = \begin{cases} 0 & \text{cuando } 0 \leqslant t \leqslant 1 - 1/n^2, \\ n^3 (t,\ 1 + 1/n^2) & \text{cuando } 1 - 1/n^2 \leqslant t \leqslant 1. \end{cases}$$

Entonces, en el espacio $\widetilde{L}_2[0, 1]$ $x_n(t) \to x \equiv 0$, pero $x_n(1) = n \not\to x(1) = 0$. 1.93. a) Sí, pero no uniformemente. b) No. El ejemplo del problema 1.92 b). c) Sí, pero no uniformemente. 1.95. a) Sí. Sean: $F: E^2 \to \mathbb{R}$; $F(x, y) = xy$; A, la hipérbola $xy = 1$; B, la recta $y = 0$. b) No.

§ 2.

2.3. En general, la afirmación inversa no es correcta. 2.5. b) No. La sucesión

$$x_n(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{t^k}{k!}, \quad n \in \mathbb{N},$$

es fundamental en ambas normas pero no converge en el espacio considerado. c) Las completaciones son isométricamente isomorfas correspondientemente a los espacios $C[a, b]$ y $\widetilde{L}_2(a, b]$. 2.6. b) No. 2.7. En el problema 1.22, todos los espacios son de Banach. En el problema 1.23 son de Banach todos los espacios excepto K y $\widetilde{L}_p[a, b]$. Al demostrar la completitud del espacio $V[a, b]$, se utiliza el hecho de que la sucesión $x_n(t)$, fundamental en la norma de $V[a, b]$, resulta sobre $[a, b]$ convergente puntualmente hacia una cierta función $x(t)$. Queda por demostrar que $x(t) \in V[a, b]$ y que $x_n(t) \to x(t)$ cuando $n \to \infty$. 2.11. No. Emplear los problemas 2.9 y 1.36. 2.12. Las normas de los puntos d) y o) del probbema 1.38 son equivalentes a la norma del espacio $C^1[a, b]$. 2.24. De modo análogo a la demostración del teorema 2.2. 2.25. Sea $x_n \in X$ una sucesión fundamental. Existen un número n_1 tal, que para todos los $n > n_1$ $\| x_n - x_{n_1} \| \leqslant 1/2$; un número $n_2 > n_1$ tal, que si $n_2 > n_1$ y para todos los $n > n_2$ $\| x_n - x_{n_2} \| \leqslant 1/2^2$, etc. Luego, hay que considerar la sucesión de bolas $\overline{S}_k = \overline{S}^k_{1/2}(x_{n_k})$ y emplear el problema 2.2. 2.26. En virtud del problema 1.5, la sucesión de radios r_n es no creciente. Si $r_n \to 0$ cuando $n \to \infty$, todo se reduce al teorema 2.2. En caso contrario, o bien r_n se estabiliza y entonces todo queda demostrado, o bien $r_n \to \rho > 0$, $r_n > \rho$. Entonces, la sucesión de bolas con los mismos centros de radios $r_n - \rho$ es también encajada. 2.27. Puede. Sea $e_k = (\underbrace{0, 0, \ldots, 0}_{k}, 1, 0, \ldots)$, $X_n = \overline{\bigcup_{k=n}^{\infty}} e_k$.

2.28. b) Sea ξ_n fundamental en X/L, entonces para cualquier $\varepsilon > 0$ existe un N tal, que para cualquier $n > N$ y para cualquier $m \geqslant 1$ se cumple la desigualdad $\| \xi_{n+m} - \xi_n \| < \varepsilon$. Sean: $\varepsilon_k = 2^{-k}$; n_k tales, que $\| \xi_{n_k+m} - \xi_{n_k} \| < 2^{-k}$. Entonces $\| \xi_{n_2} - \xi_{n_1} \| < 1/2$ y existen unas $x_1 \in \xi_{n_1}$, $x_2 \in \xi_{n_2}$ tales, que $\| x_2 - x_1 \| < 1$. De modo análogo se componen las $x_k \in \xi_{n_k}$ tales, que $\| x_k - x_{k-1} \| < 1/2^{k-1}$. La sucesión x_k es fundamental en X, por eso $x_k \to x_0 \in X$. Sea ξ_0 una clase que contiene x_0. Entonces, $\xi_{n_k} \to \xi_0$ y, por lo tanto, $\xi_n \to \xi_0$.

§ 3.

3.9. No. 3.11. En general, no. Sea la serie $\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k$ convergente y para un número escogido $\varepsilon > 0$, N es tal, que $\sum_{k=N+1}^{\infty} \lambda_k < \varepsilon$. Consideremos la sucesión $x_n = (\underbrace{1, \ldots, 1}_{n}, 0, 0, \ldots)$. Entonces para m, $n > N$ se tiene $\| x_m - x_n \| < \varepsilon$, pero x_n no es convergente. 3.23. La inclusión estricta es posible (por ejemplo, si el conjunto M es siempre denso en el espacio H). 3.26. b) $f_1(t) \equiv 1$, $f_2(t) = -t + 1$, $f_3(t) = t^2 - 4t + 2$. 3.27. b) $f_1(t) \equiv 1$, $f_2(t) = 2t$, $f_3(t) = 4t^2 - 2$. 3.29. En calidad de un sistema así se puede escoger, por ejemplo, $x_n = (\underbrace{1, 0, 0, \ldots, 0}_{n-1}, -1, 0, 0, \ldots)$. 3.30. $N = M^{\perp}$ es un subespacio unidimensional con la base $a_n = (\underbrace{1, 1, \ldots, 1}_{n}, 0, 0, \ldots)$. 3.32. No. M y N pueden incluso no ser variedades lineales. 3.33. En calidad de M es suficiente considerar un conjunto siempre denso en el espacio l_2. 3.34. No. Por ejemplo, sean: M, un subespacio del espacio l_2 del problema 3.30; N, un subespacio unidimensional con base $(1, 0, 0, \ldots, 0, \ldots)$. Entonces, según el problema 3.30, $N \neq M^{\perp}$, pero $l_2 = M \oplus N$. 3.36. b) $M^{\perp} = \{x(t) \in \widetilde{L}_2[-1, 1]: x(t) = 0$ para $t \leqslant 0\}$. c). No. 3.37. Del supuesto de que el elemento $x \in l_2$ es ortogonal a la cápsula lineal, deducir que $x = 0$. 3.38. Demostrar que

$$M - x_0 = \{x \in H: (x, x_k) = 0, k \in \mathbf{N}\}.$$

3.41. Consideremos la sucesión

$$x_n = (\underbrace{0, 0, \ldots, 0}_{n-1}, 1 + 1/n, 0, 0, \ldots) \in l_2.$$

3.42. Sea que para cualquier $z \in M$ se cumple la desigualdad $(x - y, y - z) > 0$. Entonces,

$$\| x - z \|^2 = ((x - y) + (y - z), (x - y) + (y - z)) \geqslant \| x - y \|^2$$

Recíprocamente, si $y \in M$ es tal, que $\rho(x, M) = \| x - y \|$ y $z \in M$, para cualquier $\lambda \in [0, 1]$ $\lambda y + (1 - \lambda) z \in M$, por consiguiente, $\| x - y \|^2 \leqslant \| x - \lambda y - (1 - \lambda) z \|^2$, de donde, para $\lambda \in [0, 1) \times (x - y, y - z) \geqslant -\frac{1}{2}(1 - \lambda) \| y - z \|^2$ y haciendo que λ tienda a 1, obtenemos la confirmación requerida. 3.43. Emplear el problema 3.42. Considerar previamente el caso $x_0 = 0$. 3.44. Sean: $M_1 \supset M_2 \supset \ldots$ esa sucesión; $a_k \in M_k$ $(k \in \mathbf{N})$, el elemento con menor norma que existe según el problema 3.40. Aprovechando el hecho de que M_k es convexo y acotado, así como también la igualdad del paralelogramo, demostrar que la sucesión a_k es fundamental. 3.45. $A_R = \{x(t) \in C[0, 1]: \| x \| \leqslant 1, x(0) = 0, x(1) = 1$ para $1/n \leqslant t \leqslant 1\}$.

4.9. $\cos\varphi = \sqrt{6}/\pi$. 4.10. $\varphi_1 = \pi/2$, $\varphi_2 = \pi/3$, $\varphi_3 = \pi/6$. 4.15. Para $\alpha \neq 0$ $t^\alpha \in L_p\,[0, 1]$, $p \geqslant 1$ para $\alpha > -1/p$, con esto $\| t^\alpha \| = (p\alpha + 1)^{-1/p}$. Para $\alpha = 0$ $x(t) \equiv 1 \in L_p\,[0, 1]$ para cualquier $p \geqslant 1$ y $\| 1 \| = 1$. 4.12. a) $f_1(t) \equiv 1$, $f_2(t) = t$, $f_3(t) = 3t^2 - 1$, $f_4(t) = 5t^3 - 3t$. b) $f_1(t) \equiv 1$, $f_2(t) = 2t - 1$, $f_3(t) = 6t^2 - 6t + 1$, $f_4(t) = 20t^3 - 30t^2 + 12t - 1$. 4.13. No. Tomemos

$$x_n(t) = \begin{cases} 0 \text{ para } |\, t - 1/2 \,| \leqslant 1/n, \\ 1 \text{ para } |\, t - 1/2 \,| > 1/n, \end{cases} \quad n \in \mathbf{N},$$

entonces $x_n(t) \in A$, pero cuando $n \to \infty$ $x_n(t) \to x(t) \equiv 1 \notin A$. 4.14. Sí. 4.16. La convexidad es obvia. Es suficiente demostrar que el conjunto es siempre denso en el conjunto de todos los polinomios. Para un polinomio arbitrario $P(t)$, la sucesión $P_n(t) = P(t)(1 - t^n)$ satisface la condición $P_n(1) = 0$ ($n \in \mathbf{N}$) y converge hacia $P(t)$ cuando $n \to \infty$.

4.18. $M^\perp = \{x(t) \in L_2\,[a, b]$: $x(t) = 0$ para $t \notin [c, d]$ en casi todos los puntos$\}$. 4.19. $M^\perp$ es un subespacio unidimensional con base $x(t) \overset{\text{c.t.p.}}{=} 1$.

4.21. Hagamos para $x(t) \in L_p\,[a, b]$, $Jx = x$. Puesto que $p > s$,

$$(\mathscr{L}) \int_a^b |\, x(t) \,|^s\, dt \leqslant b - a + (\mathscr{L}) \int_a^b |\, x(t) \,|^p\, dt < \infty.$$

En la desigualdad de Hölder

$$\left| (\mathscr{L}) \int_a^b f(t)\, g(t)\, dt \right| \leqslant \left((\mathscr{L}) \int_a^b |\, f(t) \,|^{p'}\, dt \right)^{1/p'} \times$$

$$\times \left((\mathscr{L}) \int_a^b |\, g(t) \,|^{q'}\, dt \right)^{1/q'}$$

$$\frac{1}{p'} + \frac{1}{q'} = 1,$$

tomemos $f(t) = |\, x(t) \,|^s$, $g(t) \equiv 1$, $p' = p/s > 1$. Entonces,

$$(\mathscr{L}) \int_a^b |\, x(t) \,|^s\, dt \leqslant \left[(\mathscr{L}) \int_a^b dt \right]^{1/q'} \left[(\mathscr{L}) \int_a^b |\, x(t) \,|^{p's}\, dt \right]^{s/p}$$

o bien

$$\left[(\mathscr{L}) \int_a^b |\, x(t) \,|^s\, dt \right]^{1/s} \leqslant (b - a)^{1/s - 1/p} \left[(\mathscr{L}) \int_a^b |\, x(t) \,|^p\, dt \right]^{1/p},$$

es decir, $\| J(x) \| \leqslant \beta \| x \|$. 4.22. Emplear el problema 1.45. 4.24. $\cos \varphi = \sqrt{\dfrac{3}{n^2+3}}$. 4.25. $f_1(t) \equiv 1$, $f_2(t) = t$, $f_3(t) = 1 - 3t^2$, $f_4(t) = 9t - 10t^3$. 4.27. $(\mathring{W}_1^1[a, b])^\perp$ es un subespacio bidimensional con base $x_1(t) = e^t$, $x_2(t) = e^{-t}$. 4.28. $M^\perp$ es un subespacio unidimensional con base $x(t) = \operatorname{sh}(t - (a+b)/2)$. 4.29. $M^\perp$ es un subespacio unidimensional, que posee como base $x(t) \equiv 1$. 4.31. $y(t) = |t|$. 4.32. $x(t) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\operatorname{sen} nt}{n\sqrt{n}}$.

§ 5.

5.5. El conjunto de elementos del tipo $\{y(t) \in C[0, 1]: y(0) = 0, 0 \leqslant y(t) \leqslant 2$ para cualquier $t \in [0, 1]\}$. 5.6. a) $u^* = 1/2$, $\rho(x_0, L) = 1/2$. b) $u^* = t - 1/8$, $\rho(x_1, L) = 1/8$. 5.9. Emplear los problemas 4.19 y 5.8. $\rho(x, L) = 1/3$. 5.10. Emplear los problemas 3.30 y 5.8. $\rho_n(x, L) = 1/\sqrt{n}$. 5.11. 0,25 para $n = 0$; $0{,}9t - 0{,}2$ para $n = 1$; $1{,}5t^2 - 0{,}6t + 0{,}05$ para $n = 2$. 5.12. Escribir la representación dada en el problema en la forma

$$x(t) = \int_0^1 x(\tau)\, d\tau + \int_0^1 K(t, \tau)\, x'(\tau)\, d\tau.$$

En cada uno de los sumandos del segundo miembro emplear la desigualdad de Cauchy—Buniakovski. Con esto

$$\int_0^1 K^2(t, \tau)\, d\tau \leqslant \frac{1}{3},$$

así que

$$\| x \|_{C[0, 1]} \leqslant \left[\int_0^1 x^2(\tau)\, d\tau\right]^{1/2} + \frac{1}{\sqrt{3}} \left[\int_0^1 x'^2(\tau)\, d\tau\right]^{1/2} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{2}{\sqrt{3}} \| x \|_{H^1[0, 1]}.$$

5.13. a) $u^* = 1/2$, $\rho(x_0, L) = \sqrt{39}/6$. b) $u^* = t - 1/6$, $\rho(x_1, L) = \sqrt{210}/30$. 5.14. Es cómodo ortogonalizar la base de L compuesta de las funciones 1, t, t^2, t^3, del modo siguiente: la base inicial se escribe en la forma de la matriz unidad F, luego la primera fila de F se escribe en la primera fila de A, matriz de la base transformada, y se normali-

za. Las filas siguientes de la matriz F se escriben en las filas de la matriz A en correspondencia a las fórmulas de ortogonalización, además, en cada oportunidad las filas se normalizan. Cuando la matriz A esté formada se calcula el producto escalar de $x(t)$ por los elementos de la fila transpuesta a la columna.

$$A\begin{pmatrix}1\\t\\t^2\\t^3\end{pmatrix}$$

Multiplicando la fila obtenida por una columna de la matriz A, obtenemos el coeficiente respectivo del polinomio de la aproximación óptima.

Los productos escalares y las normas en el espacio $H_p[0, 1]$ se calculan recurriendo el subprograma correspondiente.

Los coeficientes de los polinomios están redondeados hasta dos decimales. En las variantes con parámetro se brinda la respuesta para $\alpha = 0$.

a) $u^*(t) = 1{,}00 - 0{,}01t + 0{,}37t^2 - 0{,}11t^3$;
b) $u^*(t) = 1{,}31 + 7{,}98t + 12{,}17t^2 - 4{,}65t^3$;
c) $u^*(t) = 2{,}00 + 0{,}99t - 0{,}21t^2 + 0{,}05t^3$;
d) $u^*(t) = -0{,}01t + 1{,}12t^2 - 0{,}42t^3$;
e) $u^*(t) = 2{,}00 + 1{,}40t + 0{,}44t^2 + 0{,}16t^3$;
f) $u^*(t) = 1{,}00 + 0{,}33t - 0{,}09t^2 + 0{,}02t^3$;
g) $u^*(t) = 1{,}17 - 9{,}24t + 20{,}72t^2 - 13{,}82t^3$;
h) $u^*(t) = -0{,}01t + 1{,}13t^2 - 0{,}42t^3$;
i) $u^*(t) = 1{,}00 - 0{,}02t + 0{,}44t^2 + 0{,}09t^3$;
j) $u^*(t) = -1{,}00 + 1{,}02t + 0{,}42t^2 + 0{,}28t^3$.

5.15. El programa principal se realiza estructuralmente según el algoritmo escrito en los datos del problema. Para esto: 1) recurriendo sucesivamente a los subprogramas de productos escalares se llenan la matriz de los coeficientes y el segundo miembro del sistema de ecuaciones lineales; 2) se recurre al subprograma estándar de resolución del sistema de ecuaciones lineales; 3) los coeficientes de los polinomios de la aproximación óptima, obtenidos como resultado de la resolución, se imprimen; 4) las magnitudes $\|x - y^*\|_{L_2[0,1]}$ y $\|x - v^*\|_{H^1[0,1]}$ se calculan y se imprimen; 5) si el programa no prevé trazar el gráfico, los valores de x, u^*, v^* se imprimen.

Los integrales se calculan según la fórmula de Simpson realizada de modo cíclico en los lugares necesarios. Para calcular los productos escalares, se introducen dos funciones- operadores en cada uno de los espacios $L_2[0, 1]$ y $H^1[0, 1]$.

Los coeficientes de los polinomios están redondeados hasta dos decimales:

a) $u^*(t) = 1{,}00 + 1{,}10t + 0{,}62t^2 + 0{,}18t^3 + 0{,}11t^4$, $v^*(t) = 1{,}00 + 1{,}10t + 0{,}62t^2 + 0{,}18t^3 + 0{,}11t^4$;
b) $u^*(t) = 0{,}99 + 0{,}25t - 6{,}69t^2 + 4{,}45t^3 - 0{,}01t^4$, $v^*(t) = 1{,}00 + 0{,}16t - 6{,}47t^2 + 4{,}31t^3$;

c) $u^*(t) = 1{,}00 + 1{,}00t + 0{,}51t^2 + 0{,}14t^3 + 0{,}07t^4$, $v^*(t) = 1{,}00 + 1{,}00t + 0{,}51t^2 + 0{,}14t^3 + 0{,}07t^4$;
d) $u^*(t) = 3{,}10t + 0{,}47t^2 - 7{,}14t^3 + 3{,}57t^4$; $v^*(t) = 3{,}12t + 0{,}39t^2 - 7{,}02t^3 + 3{,}51t^4$;
e) $u^*(t) = 0{,}97 + 1{,}91t - 40{,}65t^2 + 77{,}48t^3 - 38{,}74t^4$, $v^*(t) = 1{,}00 + 1{,}09t - 36{,}64t^2 + 71{,}11t^3 - 35{,}55t^4$;
f) $u^*(t) = 0{,}22t + 1{,}32t^2 - 0{,}82t^3 + 0{,}28t^4$, $v^*(t) = 0{,}12t + 1{,}68t^2 - 1{,}29t^3 + 0{,}48t^4$;
g) $u^*(t) = 1{,}14 - 8{,}92t + 20{,}37t^2 - 14{,}49t^3 + 0{,}77t^4$; $v^*(t) = 0{,}01 + 4{,}49t - 13{,}87t^2 + 9{,}98t^3 - 0{,}63t^4$;
h) $u^*(t) = 1{,}00t - 0{,}46t^2 + 0{,}21t^3 - 0{,}05t^4$, $v^*(t) = 1{,}00t - 0{,}47t^2 + 0{,}22t^3 - 0{,}06t^4$;
i) $u^*(t) = -0{,}55 + 1{,}28t - 0{,}56t^2 + 0{,}37t^2$, $v^*(t) = -0{,}55 + 1{,}29t - 0{,}58t^2 - 0{,}39t^3$;
j) $u^*(t) = 0{,}93 + 2{,}36t - 22{,}11t^2 + 38{,}79t^3 - 20{,}88t^4$, $v^*(t) = 1{,}00 + 1{,}52t - 20{,}35t^2 + 38{,}30t^3 - 21{,}47t^4$.

5.17. Para $n = 5$, los coeficientes de los polinomios de la aproximación óptima están redondeados hasta dos decimales:
$u_0^* = 0{,}31$, $\rho(x, L_0) = 0{,}38$; $u_1^*(t) = -0{,}17 + 0{,}96t$,
$\rho(x, L_1) = 0{,}16$; $u_2^*(t) = 0{,}02 - 0{,}54t + 1{,}50t^2$,
$\rho(x, L_2) = 0{,}03$. **5.18.** b) $n = 9$, c) $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} \beta_n = 2/\pi$.

5.19. Para $n = 15$, los coeficientes de los polinomios de la aproximación óptima están redondeados hasta dos decimales

a) $u^*(t) = -0{,}12 + 35{,}28t - 302{,}37t^2 + 859{,}16t^3 - 986{,}37t^4 + 394{,}55t^5$;

b) $u^*(t) = 0{,}10 - 0{,}03t^2 + 0{,}61t^3 - 0{,}12t^4 - 0{,}04t^5$;
c) $u^*(t) = 1{,}02t + 0{,}68t^2 + 1{,}04t^3 - 0{,}41t^4 + 0{,}51t^5$;
d) $u^*(t) = 0{,}99t - 0{,}49t^2 + 0{,}28t^3 - 0{,}13t^4 + 0{,}03t^5$;
e) $u^*(t) = 1{,}33 - 25{,}58t - 112{,}04t^2 - 172{,}92t^3 + 84{,}46t^4$;
f) $u^*(t) = 3{,}10t + 0{,}48t^2 - 7{,}17t^3 + 3{,}58t^4$;
g) $u^*(t) = 0{,}10 + 1{,}00t + 0{,}50t^2 + 0{,}17t^3 + 0{,}03t^4 + 0{,}01t^5$;
h) $u^*(t) = 0{,}47t - 13{,}56t^2 + 26{,}20t^3 - 24{,}03t^4 + 8{,}28t^5$;
i) $u^*(t) = 0{,}34t - 0{,}41t^2 + 1{,}75t^3 - 3{,}38t^4 + 3{,}00t^5$;
j) $u^*(t) = -0{,}54 + 1{,}30t - 0{,}69t^2 + 0{,}73t^3 - 0{,}40t^4 + 0{,}16t^5$.

§ 6.

6.2. Los tres espacios son completos. **6.3.** La función $u = f(v)$ debe ser monótona. **6.4.** La función $u = f(v)$ debe ser monótona y su campo de valores debe coincidir con R. **6.5.** a) El espacio es incompleto; su completación es isométrica al segmento $[-\pi/2, \pi/2]$. b) El espacio es incompleto, su completación es isométrica a la semirrecta $[0, +\infty)$. c) El espacio es completo. **6.6.** c) Si $\rho(x, y) = \|x - y\|$, $\rho(x, 0) = \|x\|$. Consideremos el elemento $x = (1, 1, 1, \ldots) \in s$. Entonces, $\|2x\| \neq 2\|x\|$, por eso no se puede introducir la norma. d) $x_n = (\underbrace{1, 1, \ldots, 1}_{n}, 0, 0, \ldots)$. **6.7.** La inclusión estricta es posible, por ejemplo, en el espacio del problema 6.1. **6.9.** La inclusión estricta $S_\alpha(x) \subset S_1(y)$ es posible si $\alpha < 2$. **6.10.** $\overline{S}_{1+1/(2n)}(n)$.

§ 7.

7.2. Como regla, no. 7.4. Sí. 7.12. a) — f) $\| A \| = 1$. g) $\| A \| = 1\sqrt{3}$. h) $\| A_\lambda \| = 1$. i) $\| A \| \leqslant 1$. j) $\| A \| = 1$. k) $\| A \| \leqslant 2$. l) $\| A \| \leqslant 1$. 7.13. No. Considerar la sucesión $x_n(t) = t^n$ $(n \in \mathbf{N})$. 7.14. Sí, $\| A \| \leqslant 1$. 7.15. a) $\varphi(t) \in C[0, 1]$, $\| A \| = \| \varphi \|_{C[0,1]}$; b) $\varphi(t) \in C[0, 1]$, $\| A \| = \| \varphi \|_{C[0,1]}$. 7.18. No. Para componer el ejemplo, emplear el problema 7.17. 7.20. b) No. Emplear el problema 7.12. c) 7.21. No. Dar un ejemplo de un operador no acotado para el cual $Y = R$. 7.23. No. Emplear el problema 7.13. 7.24. Como $N(A)$ es un subespacio, consideremos el espacio cociente $X/N(A)$ y el operador π: $X \to X/N(A)$ (véase el problema 7.7). El operador A determina un operador biunívoco A': $X/N(A) \to R(A)$ tal, que $A = A'\pi$. Como A' es biunívoco y $R(A)$ es de dimensión finita, $X/N(A)$ es también de dimensión finita. En virtud del problema 7.19, el operador A' es continuo. Conforme al problema 7.7 el operador π es continuo. Así, el operador A es también continuo. 7.25. No. Considerar el operador A: $E^2 \to E^2$, $A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} y \\ 0 \end{pmatrix}$. 7.28. Sí, y sólo si, $\varphi(t)$ no se anula sobre $[a, b]$. 7.29. a). No, puesto que es posible que $N(A) \neq 0$. Si $N(A) = 0$, el espacio no tiene que ser completo ya que es isométrico a $R(A)$. b) Sí. En esta norma X es un espacio de Banach. 7.30. b) $\sup\limits_n |\lambda_n| < +\infty$. c) $\sup\limits_n |\lambda_n| < +\infty$, $\| A \| = \sup\limits_n |\lambda_n|$. d) No. e) Si, y sólo si, $\inf\limits_{\lambda_k \neq 0} |\lambda_k| > 0$.

§ 8.

8.3. En general, no. Formular un ejemplo para el operador A: $E^2 \to E^2$. 8.4. En general, no. Emplear el problema 7.12 e). 8.5. No. M puede incluso no ser una variedad lineal. 8.6. Sí. 8.9. a), b) Sí. 8.11. En general, no. En el espacio l_2 considerar $A = I$, un operador idéntico, $A_n x = (x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, nx_n, x_{n+1}, \ldots)$ para $x = (x_1, x_2, \ldots) \in l_2$. En calidad de variedad lineal considerar un conjunto de elementos del espacio l_2 que tienen solamente un número finito de coordenadas distintas de cero. 8.15. c) Con el crecimiento de n, la sucesión $\| A_n \|$ crece pero despacio: $\| A_3 \| = 2{,}07$, $\| A_6 \| = 2{,}35$, $\| A_8 \| = 2{,}41$, $\| A_{10} \| = 2{,}57$. Por eso, es difícil juzgar por los resultados obtenidos, acerca de si la sucesión $\| A_n \|$ es acotada o no. En [11] se demuestra que la sucesión $\| A_n \|$ es no acotada. 8.16. e) Al crecer n, la sucesión $\| A_n \|$ crece rápidamente: $\| A_3 \| = 3{,}80$; $\| A_5 \| = 4{,}75$, $\| A_8 \| = 7{,}60$, $\| A_{10} \| = 9{,}50$. Por lo tanto, es verosímil (y está demostrado, véase [14]) que la sucesión $\| A_n \|$ sea no acotada. 8.17. No. Consideremos la sucesión de operadores A_n: $l_2 \to l_2$,

$$A_n x = (\underbrace{0, \ldots, 0}_{n}, x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots)$$

para $x = (x_1, x_2, \ldots) \in l_2$. 8.19. La sucesión A_n converge hacia el operador nulo uniformemente; la sucesión B_n, fuertemente. 8.20. La sucesión A_n converge hacia el operador A uniformemente. 8.21. Las sucesiones A_n y B_n convergen hacia el operador A uniformemente. 8.22. c) No. 8.28. a), b) Sí. 8.31. $e^I = eI$. 8.33. No. Para $u \in [0, 1]$ tomar

$$\lambda_u(t) = \begin{cases} 1 \text{ para } t \leqslant u, \\ 0 \text{ para } t > u \end{cases}$$

y emplear los problemas 7.12 h) y 1.77. 8.34. Sea $y \in Y$. Existe un $x_1 \in X$ tal, que $\| Ax_1 - y \| \leqslant \alpha \| y \|$, $\| x_1 \| \leqslant \beta \| y \|$. Además, existe un $x_2 \in X$ tal, que $\| Ax_2 - (Ax_1 - y) \| = \| A(x_1 - x_2) - y \| \leqslant \alpha \| Ax_1 - y \| \leqslant \alpha^2 \| y \|$, $\| x_2 \| \leqslant \alpha\beta \| y \|$, etc. Como resultado, obtenemos una sucesión $x_n \in X$ tal, que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \| x_n \| \leqslant \beta \| y \| \sum_{n=0} \alpha^n = \frac{\beta}{1-\alpha} \| y \|,$$

y la serie $x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + \ldots$ converge hacia cierto $x \in X$. De otro lado, $A\left(\sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} x_i\right) \to y$ cuando $n \to \infty$, y como A es un operador continuo, $Ax = y$. 8.35. Sea $x = u + v$, $u \in L$, $v \in M$. Hagamos $\| x \|_1 = \| u \| + \| v \|$ y demostremos que el espacio X es completo respecto a $\| \cdot \|_1$. Las normas $\| \ \|_1$ y $\| \ \|_2$ son equivalentes (véase [25], pág. 168, teorema 3). Precisamente esto significa el carácter acotado del operador P. 8.36. Sea P un operador acotado que satisface la condición $P^2 = P$. Tomar $L = N(I - P)$, $M = N(P)$ y demostrar que $X = L \oplus M$. 8.37. Sea P acotado y $P^2 = P$. Establecer que $R(I - P) = N(P)$ y $R(P) = N(I - P)$; emplear el problema 7.22. Recíprocamente, si las variedades lineales $R(P)$ y $R(I - P)$ son cerradas, demostrar que $X = R(P) \oplus R(I - P)$ y que P es un operador de proyección. Luego emplear el problema 8.35. 8.38. a) $\| A \| = \| B \| = 1$. b) $A^2 = A$, $B^2 = B$; sí, lo son. 8.39. $\| P \| = 1$. 8.41. a) $L^{\perp} \subset N(A)$. b) $R(A) \subset L$. c) L, $L^{\perp}$, son subespacios invariantes para A, es decir, de $x \in L$ se desprende que $Ax \in L$, y de $x \in L^{\perp}$, que $Ax \in L^{\perp}$. 8.42. Sea $\overline{L}$ la clausura de L; entonces el operador A puede ser prolongado sobre $\overline{L}$ conservando la norma, en virtud del teorema 8.4. Sea P un operador de proyección ortogonal sobre L. Tomamos $Bx = A(Px)$ para $x \in H$. Entonces B es una prolongación de A que conserva la norma. 8.43. Sea P un operador de proyección sobre L paralelamente a M. El operador $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ puede representarse de la forma $A = PA + (I - P)A$. 8.44. Incorrecto. Formular un ejemplo para el caso $X = Y = E^2$.

§ 9.

9.3. Sí. Demostrar que $N(A) = N(B) = 0$. 9.4. Sea $(I - AB)^{-1} = C$. Demostrar que $(I - BA)^{-1} = I + BCA$. 9.5. Demostrar que $A^{-1} = -I - B$. 9.8. Emplear el teorema 9.1, 9.9. El operador A^{-1} existe para $\lambda_n \neq 0$ y es acotado si, y sólo si, $\inf_n | \lambda_n | > 0$. 9.10.

Existen los operadores $A_1^{-1} = B$ y $B_r^{-1} = A$. 9.13. a) $R(A)$ es una variedad lineal de funciones continuamente diferenciables $y(t)$ que satisfacen la condición $y(0) = 0$. b) El operador A^{-1} existe pero no es acotado. 9.14. b)

$$A^{-1}y = y(t) - \int_0^t e^{\tau - t} y(\tau)\, d\tau.$$

9.15. $A^{-1}y = y(t) - \dfrac{2}{e^2 - 1} \int_0^1 y(s)\, e^{s+t}\, ds.$

9.16. b) $A^{-1}y = \int_0^t y(\tau) \operatorname{sen}(t - \tau)\, d\tau.$

9.17. Sí. De la igualdad $Ax = y$ deducir que $y'' - y = -2x$. 9.19. Tomar $B = I - A$ y emplear el teorema 9.3. 9.20. Representar $A - \lambda I$ de la forma $A - \lambda I = -\lambda(I - \lambda^{-1}A)$ y emplear el teorema 9.3. 9.22. Si para $n \in \mathbf{N}$ $\| A_n^{-1} \| \leqslant c$, $A_n x_n = y$, $Ax = y$, entonces, $\| x_n - x \| = \| A_n^{-1} A_n (x_n - x) \leqslant c \| A_n (x_n - x) \| = c \| A_n x - Ax + Ax - A_n x_n \| = c \| A_n x - Ax \| \to 0$. Recíprocamente, si $x_n \to x$ cuando $n \to \infty$, la sucesión $x_n = A_n^{-1}$ y es acotada para cualquier $y \in Y$ y, en virtud del teorema 8.2, la sucesión $\| A_n^{-1} \|$ es acotada. 9.23. Sea el operador A continuamente invertible. Existe un N tal, que para $n > N$ $\| A_n A^{-1} - I \| = \| A_n A^{-1} - AA^{-1} \| \leqslant \| A_n - A \| \| A^{-1} \| < 1/2$. Emplear luego el teorema 9.4. Para demostrar el carácter suficiente, emplear el mismo teorema. 9.24. Sea $AB = I$, es decir, $B = A_1^{-1}$. Si $N(A) \neq 0$, para $y \in N(A)$, tomemos C: $H \to H$, $Cx = (x, y)\, y$. Entonces $C \neq 0$ y $B + C \in \mathscr{L}(H)$, además $A(B + C) = I$, lo que contradice a la unicidad del operador B.

§ 10.

10.1. Demostrar que $A^{-1} \in \mathscr{L}(C, 0, 1)$ y emplear el teorema 10.2. **10.2.** Hallar el operador A^{-1} y emplear el teorema 10.2. 10.3. Emplear el problema 9.16 y el teorema 10.2. 10.4. Conforme al teorema 10.3, es suficiente con demostrar que P es cerrado. El carácter cerrado de P se desprende del carácter cerrado de L y de M. 10.8. No. El subespacio $L \subset X \dotplus Y$ de elementos tipo $(0, y)$, donde $y \in Y$, no representa el gráfico de ningún operador. 10.10. a) No. Emplear el ejemplo del problema 10.2. b) No. Considerar el operador A: $C^1[0, 1] \to C[0, 1]$, $Ax = x$. 10.12. Emplear el teorema 9.1. 10.14. Emplear los teoremas 10.2 y 10.3. 10.15. Sea que el operador A es cerrado y la sucesión g_n es fundamental en $\| \|_1$. Entonces $g_n \to g$ en X y $Ag_n \to h$ en Y, en virtud del carácter cerrado de $g \in D(A)$ y $Ag = h$. De aquí se logra $\| g_n - g \|_1 = \| g_n - g \|_X + \| Ag_n - Ag \|_Y \to 0$. Recíprocamente, si $D(A)$ es de Banach, $g_n \in D(A)$, $g_n \to g$, $Ag_n \to h$ cuando $n \to \infty$, y como g_n es fundamental en $\| \|_1$, existe una $f \in D(A)$ tal, que $\| g_n - f \|_1 \to 0$ cuando $n \to \infty$. Como $\| g_n - f \| \leqslant \| g_n - f \|_1$, $g_n \to f$ en la norma de X, por consiguiente, $g = f$ y $\| Ag_n - Ag \| \to 0$ cuando $n \to \infty$. De aquí surge que $h = Af = Ag$.

§ 11.

11.1. Si existe un $x \in X$ tal, que $\langle x, f\rangle = \lambda \neq 0$, entonces $\langle x/\lambda, f\rangle = 1$. 11.3. a) $\|f\| = 2/3$. b) $\|f\| = 4$. c) $\|f\| = \sum_{k=1}^{n} |\alpha_k|$. d) $\|f\| = 2/\pi$. e) $\|f\| = 1$. f) $\|f\| = 3$. g) $\|f\| = 2$. h) $\|f\| = 3 + \sum_{k=1}^{n} \frac{2}{2k+1}$. 11.4. a), b), c) Sí. 11.5. a) $\|f\| = 1$. b) $\|f\| = 1/2$. c) $\|f\| = 1$. d) $\|f\| = \sqrt{2/3}$. e) $\|f\| = \sqrt{3}$. f) $\|f\| = \sqrt{2}$. g) $\|f\| = \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}} = \frac{\pi}{\sqrt{6}}$. h), i) $\|f\| = 1$. j), k) $\|f\| = 2$. l) $\|f\| = 1$.

11.6. a) Para $p \geq 1$. b) Para $p > 2$. 11.7. a) Sí, $\|f\| = 1$. b) No. Considerar la sucesión $x_n(t) = \operatorname{sen} nt/n$. 11.8. b) Tomemos

$$c = \frac{1}{b-a} \int_a^b u(t)\, dt, \qquad x(t) = \int_0^t [u(\tau) - c]\, d\tau;$$

entonces $x(t) \in L$ y $x'(t) = u(t) - c$, por lo tanto,

$$\int_a^b u(t)\,(u(t) - c)\, dt = 0,$$

de donde

$$\int_a^b [u(t) - c]^2\, dt = \int_a^b u(t)\,(u(t) - c)\, dt - c \int_a^b (u(t) - c)\, dt = 0.$$

y como $u(t) - c$ es una función continua sobre $[a, b]$, $u(t) = c$. c) Integrando por partes y teniendo en cuenta que $x(t) \in L$, obtenemos

$$\int_a^b v(t)\, x(t)\, dt = -\int_a^b \left(\int_a^t v(\tau)\, d\tau \right) x'(t)\, dt.$$

Por eso,

$$\langle x, g\rangle = \int_a^b \left[w(t) - \int_a^t v(\tau)\, d\tau \right] x'(t)\, dt.$$

Conforme al punto b), de aquí se deduce que $w(t) - \int_a^t v(\tau)\,d\tau = c$, lo que significa que $w(t) \in C^1[a, b]$ y $w'(t) = v(t)$. **11.9.** Emplear el problema 11.3 g) **11.10.** Emplear los problemas 11.5 i), k). **11.11.** $\|f\| = 1/(2r)$. **11.12.** Para demostrar el carácter suficiente emplear el hecho que todo conjunto abierto sobre la recta es la unión de un número finito o numerable de intervalos y el problema 1.85 b). **11.13.** Si f no es acotada, entonces no está acotada sobre la bola $\overline{S}_1(0)$, por eso existe una sucesión $x_n \in X$ tal, que $\|x_n\| \leqslant 1$ y $|\langle x_n, f\rangle| > n$. Considerar la sucesión $a_n = x_n/\sqrt{n}$. **11.15.** Para demostrar el carácter suficiente emplear el problema 11.14. **11.16.** Sea un $x \in X$ tal, que $\langle x, f\rangle = c \neq 0$; entonces $\langle x/c, f\rangle = 1$ y $x_0 = x/c$ es una base de M. **11.18.** Si $x \notin L$, entonces $L + \{\lambda x\}$, donde $\lambda \in \mathbf{R}$, es un subespacio que contiene a L, por lo tanto, $L + \{\lambda x\} = X$. Sobre X definamos una funcional f mediante la igualdad $\langle y, f\rangle = \lambda$, si $y = u + \lambda x$, donde $u \in L$. **11.21.** Emplear los problemas 11.14, 11.15 y 11.20.

11.22. Para $x \in L$ $|\langle x, f\rangle| = 1 \leqslant \|x\|\,\|f\|$, de donde $\inf_{x \in L} \|x\| \geqslant 1/\|f\|$. Por otro lado, existe una sucesión $x_n \in X$ tal, que $\|x_n\| = 1$ y $|\langle x_n, f\rangle| \geqslant \frac{n}{n+1}\|f\|$. Si $y_n = \frac{x_n}{\langle x_n, f\rangle}$, entonces $y_n \in L$ y $\|y_n\| \leqslant \frac{n+1}{n}\frac{1}{\|f\|}$, por eso $\inf_{x \in L}\|x\| \leqslant \frac{1}{\|f\|}$. **11.23.** Si $y \in L$, $|\langle x - y, f\rangle| \leqslant \|x - y\| \cdot \|f\|$, pero $\langle x - y, f\rangle = \langle x, f\rangle$, por eso $\|x - y\| \geqslant \frac{|\langle x, f\rangle|}{\|f\|}$ y, por consiguiente, $\rho(x, L) = \inf_{y \in L}\|x - y\| \geqslant \frac{|\langle x, f\rangle|}{\|f\|}$. Por otro lado, existe una sucesión $x_n \in X$ tal, que $\|x_n\| = 1$ y $|\langle x_n, f\rangle| > \frac{n}{n+1}\|f\|$. Hagamos $y = x - \frac{\langle x, f\rangle}{\langle x_n, f\rangle}x_n$; entonces $y \in L$ y $\|x - y\| \leqslant \frac{n+1}{n}\frac{|\langle x, f\rangle|}{\|f\|}$. **11.24.** Emplear el problema anterior.

§ 12.

12.3—12.5. Emplear el corolario 1 del teorema 12.1. **12.8.** Emplear el corolario 2 del teorema 12.1. **12.9.** En X existe un subespacio L de cualquiera dimensión finita, entonces la dimensión de L^* es igual a la dimensión de L. Una funcional lineal continua, dada sobre L, se prolonga sobre todo el X. **12.10.** b) El complemento ortogonal a M. c) Emplear el corolario 2 del teorema 12.1. **12.13.** Sea $f_1, f_2, \ldots \subset X^*$, un conjunto siempre denso. Para cada f_k escojamos un $x_k \in X$ tal, que $\|x_k\| = 1$ y $|\langle x_k, f_k\rangle| \geqslant \|f_k\|/2$. El conjunto K de todas las combinaciones lineales x_k con coeficientes racionales, es numerable. Si $\overline{K} \neq X$, entonces, según el corolario 2 del teorema 12.1, existe una $f \in X^*$ tal, que $f \not\equiv 0$ y $\langle x, f\rangle = 0$ para cualquiera x de $\overline{K}$, en particu-

lar, $\langle x_k, f\rangle = 0$ para $k \in \mathbf{N}$. Existe un $m \in \mathbf{N}$ tal, que $\| f - f_m \| < \varepsilon$. Entonces, $| \langle x_m, f - f_m\rangle | = | \langle x_m, f_m\rangle | \geqslant \frac{\|f_m\|}{2} = \frac{\|f_m\|}{2} \| x_m \|$; en consecuencia $\| f - f_m \| \geqslant \frac{\|f_m\|}{2}$, $\| f_m \| < 2\varepsilon$ y, por lo tanto, $\| f \| \leqslant \leqslant \| f_m \| + \| f - f_m \| < 3\varepsilon$. De esta manera, $f = 0$ es una contradicción. La afirmación inversa, como se desprende del problema 12.24 es incorrecta. **12.14.** Sí

$$\langle x, f\rangle = \int_{-1}^{1} x(t)\, g(t)\, dt, \quad g(t) \in C[-1, 1],$$

hagamos $x(t) = t^2 g(t)$. La función

$$g(t) = \begin{cases} 0 \text{ para } t \leqslant 0, \\ 1 \text{ para } t > 0 \end{cases}$$

tiene variación acotada sobre $[-1, 1]$ y satisface la condición

$$x(0) = \int_{-1}^{1} x(t)\, dg(t).$$

12.15. b)

$$g(t) = \begin{cases} 0 \text{ para } t = -1, \\ t^2/2 \text{ para } -1 < t < 1. \\ 1 \text{ para } t = 1. \end{cases}$$

12.16. b). 1) Unívocamente, $\langle x, f\rangle = x(1)$. 2) No es unívoca, las prolongaciones $\langle x, f_1\rangle = x(0)$ y $\langle x, f_2\rangle = -x(1)$ coinciden con f sobre L. **12.17.** Si $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in E^2$, la prolongación es $\langle x, \hat{f}\rangle = \frac{1}{5} x_1 + \frac{2}{5} x_2$. **12.20.** Cerciorarse de que en el lema sobre la prolongación elemental ([25], § 16.1) $\alpha = \beta$, de modo que γ está unívocamente determinado. **12.25.** $\| f \| = \sqrt{2}$. **12.26.** Sí.

$$| \langle x, f\rangle | = \left| \int_{-1}^{1} [x \cos t + x' \operatorname{sen} t]\, dt \right| =$$

$$= \left| \int_{-1}^{1} \sqrt{x^2 + x'^2} \cos(t + \varphi)\, dt \right| \leqslant$$

$$\leqslant \left[\int_{-1}^{1} (x^2 + x'^2)\, dt \right]^{1/2} \left[\int_{-1}^{1} 1\, dt \right]^{1/2} = \sqrt{2}\, \| x \|.$$

De la condición $\langle x, f\rangle = (x, y)$ se desprende que la función $y(t)$ es la solución del problema de contorno $y'' - y = 0$, $y'(1) = \operatorname{sen} 1$, $y'(-1) = \operatorname{sen}(-1)$, de donde $y(t) = \dfrac{\operatorname{sen} 1}{\operatorname{sh} 1} \operatorname{ch} t$.

§ 13.

13.3. a) $(x_n, y_n) \to (x, y)$ cuando $n \to \infty$. b) (x_n, y_n) puede no tener límite. Por ejemplo, sea e_n $(n \in \mathbf{N})$ un sistema ortonormalizado en H. Tomemos $x_n = e_n$,

$$y_n = \begin{cases} e_n & \text{para } n \text{ impar} \\ e_{n-1} & \text{para } n \text{ par.} \end{cases}$$

13.7. No. Por ejemplo, sea $X = l_1$; según el problema 12.24. $X^* = m$. Hagamos $f_n = (\underbrace{1, 1, \ldots, 1}_{n}\ 0, 0, \ldots)$. Entonces $L \subset c_0 \subset m$, pero para cualquiera $x \in l_1 < x,\ f_n > = \sum_{i=1}^{n} x_i$, por lo tanto, $\sum_{i=1}^{\infty} x_i = \langle x, f_0\rangle$, donde $f_0 = (1, 1, \ldots, 1, \ldots) \notin c_0$. 13.8. No. Hallar $\| f_n \|$. 13.9. a) $\| f \| = 1$. b) No, eso se desprende del punto a). 13.12. Tomemos para $n \in \mathbf{N}$

$$x_n(t) = \begin{cases} 0 & \text{para } 0 \leqslant t \leqslant \dfrac{1}{2^n}, \\ \left(t - \dfrac{1}{2^n}\right) 2^{n+1} & \text{para } \dfrac{1}{2^n} \leqslant t \leqslant \dfrac{1}{2^n} + \dfrac{1}{2^{n+1}}, \\ 1 + \left(\dfrac{1}{2^n} + \dfrac{1}{2^{n+1}} - t\right) 2^{n+1} & \text{para } \dfrac{1}{2^n} + \dfrac{1}{2^{n+1}} \leqslant t \leqslant \dfrac{1}{2^{n-1}}. \\ 0 & \text{para } \dfrac{1}{2^{n-1}} \leqslant t \leqslant 1. \end{cases}$$

Entonces $x_n \in C[0, 1]$, $\| x_n \| = 1$ y, por lo tanto, x_n no converge a cero. Al mismo tiempo, $x_n \to 0$ $(n \to \infty)$ débilmente. En realidad, cuando $n \to \infty$

$$|\langle x_n, f\rangle| = \left| \int_0^1 x_n(t)\, dg(t) \right| = \left| \int_{1/2^n}^{1/2^{n-1}} x_n(t)\, dg(t) \right| \leqslant \|x_n\| \bigvee_{1/2^n}^{1/2^{n-1}} g \to 0$$

para cualquier función $g(t)$ con la variación acotada sobre $[0, 1]$. 13.13. Hay que demostrar que, en el espacio l_1, de la convergencia débil se desprende la convergencia según la norma, además, esto es suficiente demostrarlo para la convergencia hacia cero. Sea que $x^{(n)} \in l_1$, $x^{(n)} \to 0$ $(n \to \infty)$ débilmente, $f_i = (\underbrace{0, 0, \ldots, 0}_{i-1}, 1, 0, 0, \ldots) \in m = l_1^*$ y $\langle x, f_i\rangle = x_i$ es la funcional correspondiente en l_1; entonces $\langle x^{(n)}, f_i\rangle = x_i^{(n)}$ y, por consiguiente, para cualquier i, $x_i^{(n)} \to 0$ cuando

$n \to \infty$. Sea que $x^{(n)}$ no tiende a cero, entonces exista una subsucesión $x^{(n_k)}$ tal, que para todos los $k \in \mathbf{N}$ tendremos $\| x^{(n_k)} \| \geqslant M > 0$. Entonces $\| x^{(n_1)} \| = \sum_{i=1}^{\infty} | x_i^{(n_1)} | \geqslant M$ y existe un m_1 tal, que $\sum_{i=1}^{m_1} | x_i^{(n_1)} | > \frac{4}{5} M$, $\sum_{i=m_1+1}^{\infty} | x_i^{(n_1)} | < \frac{M}{10}$. Hagamos $\alpha_1 = 1$. Ya que $x_i^{(n_{\alpha_1})} \to 0$ para cualquier i, entonces, $\sum_{i=1}^{m_1} | x_i^{(n_{\alpha_1})} | \to 0$ y existe un $\alpha_2 > \alpha_1$ tal, que $\sum_{i=1}^{m_1} | x_i^{(n_{\alpha_2})} | < \frac{M}{10}$, de donde $\sum_{i=m_1+1}^{\infty} | x_i^{(n_{\alpha_2})} | > \frac{9}{10} M$ y existe un $m_2 > m_1$ tal, que $\sum_{i=m_1+1}^{m_2} | x_i^{(n_{\alpha_2})} | \geqslant \frac{4}{5} M$, $\sum_{i=m_2+1}^{\infty} | x_i^{(n_{\alpha_2})} | < \frac{M}{10}$. Continuando este proceso, obtenemos la sucesión $x^{(n_{\alpha_k})}$ y la sucesión correspondiente $m_1 < m_2 < \ldots$ tales, que para cualquier k

$$\sum_{i=1}^{m_{k-1}} | x_i^{(n_{\alpha_k})} | < \frac{M}{10}, \quad \sum_{i=m_{k-1}+1}^{m_k} | x_i^{(n_{\alpha_k})} | \geqslant \frac{4}{5} M,$$

$$\sum_{i=m_k}^{\infty} | x_i^{(n_{\alpha_k})} | \leqslant \frac{M}{10}, \quad m_0 = 0.$$

Ahora, determinemos $c = (c_1, c_2, \ldots) \in m$ del modo siguiente: para cada j hallamos un k tal, que se cumplan las desigualdades $m_{k-1} \leqslant j \leqslant m_k$ y hacemos $c_j = 1$ si $x_j^{(n_{\alpha_k})} \geqslant 0$ y $c_j = -1$ si $x_j^{(n_{\alpha_k})} < 0$. Entonces para la funcional correspondiente $\langle x, f \rangle = \sum_{i=1}^{\infty} c_i x_i$ tendremos

$$\langle x^{(n_{\alpha_k})}, f \rangle = \sum_{i=1}^{\infty} c_i x_i \geqslant$$

$$\geqslant \sum_{i=m_{k-1}+1}^{m_k} c_i x_i^{(n_{\alpha_k})} - \sum_{i=1}^{m_k-1} | x_i^{(n_{\alpha_k})} | - \sum_{i=m_k+1}^{\infty} | x_i^{(n_{\alpha_k})} | \geqslant$$

$$\geqslant \sum_{i=m_{k-1}+1}^{m_k} |x_i^{(n_{\alpha_k})}| - \frac{M}{10} - \frac{M}{10} \geqslant \frac{4}{5}M - \frac{M}{5} = \frac{3}{5}M,$$

y $\langle x^{(n_{\alpha_k})}, f\rangle$ no tiende a cero cuando $k \to \infty$. 13.16. Si $f = 0$ se puede tomar cualquier x. Sea $f \neq 0$. En virtud del corolario 1 del teorema 12.1, existe un $F \in X^{**}$ tal, que $\|F\| = 1/\|f\|$ y $\langle f, F\rangle = 1 = \|F\|\cdot\|f\|$. Puesto que X es reflexivo, $\langle g, F\rangle$, siendo $g \in X^*$, tiene la forma $\langle x, g\rangle$, donde $\|x\| = \|F\| = 1/\|f\| \neq 0$. Así, $\langle f, F\rangle = \langle x, f\rangle = \|f\|\cdot\|F\| = \|f\|\cdot\|x\|$. 13.21. b) Sistema ortonormalizado en un espacio de Hilbert. 13.22, 13.23. Emplear el teorema 13.5. 13.24. No. Considerar la sucesión $x_n(t) = t^n$ $(n \in \mathbb{N})$. 13.25. Sean: $e_1, e_2, \ldots$, un conjunto numerable siempre denso en X (se pueden considerar sus elementos como linealmente independientes); L_n, un subespacio de X, engendrado por $e_1, e_2, \ldots, e_n$, $r_1, r_2, \ldots, r_n$ que son números racionales. Al conjunto $(n, r_1, r_2, \ldots, r_n)$ le ponemos en correspondencia la siguiente funcional: la definiremos, sobre L_n, como valores sobre los elementos de base $\langle e_i, f\rangle = r_i$, y luego la prolongamos sobre X conservando la norma. Es obvio que el conjunto de tales funcionales es numerable. Queda por demostrar que es siempre denso en X^* en el sentido de la convergencia *-débil. 13.26. No. En calidad de L tomar el espacio $C[0, 1]$ como un subespacio del espacio X^*, donde $X = C[0, 1]^*$.

§ 14.

14.4. Debido a que la aplicación es lineal, es suficiente demostrar su continuidad en el punto 0. 14.6. d) Emplear el problema 7.11.

14.9. a) $A^*y = \int_t^1 y(\tau)\,d\tau$; b) $A^*y = ty(t)$;

c) $A^*y = \int_0^1 ty(t)\,dt$; d) $A^*y = \int_0^1 ty(s)\,ds$.

14.10. a) $A^*\colon m \to m$, $A^*x = (x_1, x_2, \ldots, x_n, 0, 0, \ldots)$.
b) $A^*\colon m \to m$, $A^*x = (\lambda_1 x_1, \lambda_2 x_2, \ldots)$.
c) $A^*\colon m \to m$, $A^*x = (x_2, x_3, \ldots)$.
d) $A^*\colon m \to m$, $A^*x = (0, x_1, x_2, \ldots)$.

14.11. Las fórmulas son las mismas que las del problema 14.10 pero los operadores actúan en el caso a) de l_1 en l_1, b) de l_2 en l_2, c) de l_1 en m. 14.12. b) $A_n^*\colon l_2 \to l_2$, $A_n^*x = (\underbrace{0, 0, \ldots, 0}_{n}, x_1, x_2, \ldots)$. Como $\|A_n^*x\| = \|x\|$, A_n^* no tiende a cero fuertemente cuando $n \to \infty$. 14.13. $J^*\colon l_1 \to l_2$, $J^*x = x$. 14.14. $A^*\colon H \to H$, $A^*x = (x, z)y$. 14.15. Sea que existe una sucesión $f_k \in H$ tal, que $\|f_k\| = 1$ y $\|Af_k\| > k$. Tomamos $\langle g, \varphi_k\rangle = (g, Af_k)$; entonces, φ_k son funcio-

nales lineales en H, además $\langle g, \varphi_k \rangle = (Bg, f_k)$, de donde tenemos que la sucesión $\langle g, \varphi_k \rangle$ es acotada para cualquier $g \in H$. Según el teorema 8.2, es una contradicción la afirmación que la sucesión $\| \varphi_k \| = \| Af_k \|$ es acotada. 14.17. c) $D(A^*) = D(A)$, $A^*x = (x_1, 2x_2, 3x_3, \ldots)$. 14.18. c) A^*: $m \to l_2$, $D(A^*) = \{x \in m, x = (x_1, x_2, \ldots)$: $\sum_{n=1}^{\infty} x_n^2 < \infty\}$, $A^*x = x$. 14.19. c) $D(A^*) = \{x(t) \in L_2[0, 1]$: $\int_0^1 \frac{x^2(t)}{t} dt < \infty\}$, $A^*x(t) = \frac{x(\sqrt{t})}{2\sqrt{t}}$. 14.20. $D(A^*)$ es una variedad lineal de funciones sobre $[0, 1]$, que pertenecen a $H^1[0, 1]$; $A^*x(t) = dx/dt$. 14.21. $D(A^*)$ es el complemento ortogonal a la función $x(t) = t$, $A^*x = 0$ para $x \in D(A^*)$. 14.22. J^*: $L_2[0, 1] \to H^1[0, 1]$,

$$J^*y = \int_0^1 G(s, t)\, y(s)\, ds, \text{ donde}$$

$$G(s, t) = \frac{1}{2(e^2 - 1)} \begin{cases} (e^s - e^{-s})(e^t + e^{2-t}) & \text{para } 0 \leqslant s \leqslant t \leqslant 1, \\ (e^t - e^{-t})(e^s + e^{2-s}) & \text{para } 0 \leqslant t \leqslant s \leqslant 1. \end{cases}$$

Para $z = J^*y$ resolver el problema de contorno $-z'' + z = y$, $z'(0) = z'(1) = 0$. 14.23 A^*: $L_2[0, 1] \to H^1[0, 1]$,

$$A^*y = \int_0^t y(s) \operatorname{ch}(s - t)\, ds + \frac{\operatorname{ch} t}{\operatorname{sh} 1} \int_0^1 y(s) \operatorname{sh}(s - 1)\, ds.$$

Para $z = A^*y$ resolver el problema de contorno $z'' - z = y'$, $z'(0) = y(0)$, $z'(1) = y(1)$.

Capítulo 4

§ 15.

15.8. Sea $a_1, a_2, \ldots, a_n$ una $\varepsilon/3$-red para M. Tomemos $F_k = \overline{S_{\varepsilon/3}(a_k)} \cap M$. 15.10. Emplear el problema 1.87 y el teorema 15.1. 15.12. Si A es bicompacto y B cerrado, pueden no existir tales puntos; emplear el problema 1.81. 15.14. Sean: M, un conjunto bicompacto; f: $M \to M$, una isometría; $f(M) \neq M$; $x_0 \in M$, $x_0 \notin f(M)$, $x_n = f(x_{n-1})$ $(n \in \mathbf{N})$. Entonces $x_n \in f(M)$ para $n \geqslant 1$. Con esto el conjunto $f(M)$ es cerrado y el conjunto $A = M \setminus f(M)$ abierto. Por lo tanto, para cierto $\varepsilon > 0$ $S_\varepsilon(x_0) \not\subset M$. Por otro lado, de la bicompacidad de M se deduce que existen números k, l tales, que $k < l$ y $\| x_k - x_l \| < \varepsilon$. Entonces, el hecho de que $\| x_0 - x_{k-l} \| < \varepsilon$ y que $x_{k-l} \in S_\varepsilon(x_0)$, representan una contradicción. 15.15. En el plano, considerar el conjunto $A = (\cos \pi\sqrt{2n}, \operatorname{sen} \pi\sqrt{2n})$ $(n \in \mathbf{N})$ y el giro de este conjunto sobre el origen de las coordenadas en el ángulo $\sqrt{2}$.

15.16. Es suficiente con demostrar que la aplicación Φ es isométrica; que es una aplicación «sobre» se deduce del problema 15.14. Sea para todo $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeño existe ε-red M_ε del conjunto M tal, que $\Phi(M_\varepsilon)$ es también ε-red, y para cualesquiera $x_1, x_2 \in M_\varepsilon \| x_1 - x_2 \| = \| \Phi(x_1) - \Phi(x_2) \|$. De ahí se deduce que la aplicación Φ es isométrica. En realidad, si $a, b \in M$, existen unas $x_1, x_2 \in M_\varepsilon$ tales, que $\| x_1 - a \| < \varepsilon$, $\| x_2 - b \| < \varepsilon$, $\| \Phi(x_1) - \Phi(a) \| < \varepsilon$, $\| \Phi(x_2) - \Phi(b) \| < \varepsilon$. Entonces,

$$\| \| a - b \| - \| \Phi(a) - \Phi(b) \| \| \leqslant \| \| a - b \| - \| x_1 - b \| \| + \| \| x_1 - b \| - \| x_1 - x_2 \| \| + \| \| \Phi(x_1) - \Phi(x_2) \| - \| \Phi(x_1) - \Phi(b) \| \| + \| \| \Phi(x_1) - \Phi(b) \| - \| \Phi(a) - \Phi(b) \| \| < 4\varepsilon.$$

Sea M_n un conjunto compuesto de n puntos de M, tal que la magnitud $d_n = \min_{x_i, x_j \in M_n} \| x_i - x_j \|$, $i \neq j$, es máxima. Si existen varios conjuntos de este tipo, escojamos entre ellos uno, para el cual

$$s_n = \sum_{x_i,\ x_j \in M_n} \| x_i - x_j \| \quad i \neq j$$

es máxima. Entonces, M_n se aplica isométricamente sobre $\Phi(M_n)$. La existencia de M_n se deduce de la bicompacidad de M.

Sean: $\varepsilon > 0$, arbitrario; $A_{\varepsilon/2}$ una $\varepsilon/2$-red para M que contiene k elementos. Entonces $d_{k+1} < \varepsilon$. Sea l el menor número natural tal, que $d_l < \varepsilon$. Entonces M_{l-1} es la ε-red buscada. 15.18. Tomar $A_n = M_1 \cap M_2 \cap \ldots \cap M_n$ y emplear el problema 15.17. 15.20. No. 15.23. Sea que M no es bicompacto, $x_n \in M$ ($n \in \mathbf{N}$) y no tiene puntos límites, además, los elementos x_n no se repiten, $r_n = \frac{1}{3} \inf_{n \neq m} \| x_n - x_m \|$. Definamos f: $M \to \mathbf{R}$, $f(x) = 0$ para $x \in M$, $x \notin S_{r_n}(x_n)$ en el caso a) $f(x) = n(1 - \| x - x_n \| / r_n)$ y en el caso b) $f(x) = (1 - 1/n)(1 - \| x - x_n \| / r_n)$. Comprobar que en ambos casos $f(x)$ es continua sobre M, pero en a) no es acotada y en b) no llega a su cota superior exacta. 15.24. No. Considerar en $\mathbf{R}$ el conjunto de números naturales y una función numérica definida sobre él. 15.26. Emplear los problemas 1.85 a) y 15.25. 15.27. No. Considerar el caso $X = \mathbf{R}$, $Y = \mathbf{R}$, $M = (-\pi/2, \pi/2)$, $f(x) = \operatorname{tg} x$. 15.29. Sí, eso está vinculado con la bicompacidad del segmento. 15.37. No, puesto que no es cerrado. 15.39. Emplear los problemas 15.38 y 15.10. 15.40. Emplear el problema 1.40 a) o 15.38. 15.41. La bola $\overline{S}_1(0)$ no es un conjunto bicompacto. Considerar la función $x(t) = |t - 1/2|$ y la sucesión de polinomios $P_n(t)$, uniformemente convergente hacia $x(t)$ sobre $[0, 1]$ y existente en virtud del teorema de Weierstrass. 15.43. Sea

$$x_n(t) = \begin{cases} 2^n t \text{ para } t \in [0, 1/2^n], \\ 1 \quad \text{para } t \in (1/2^n, 1] \end{cases} \qquad y_n(t) = \int_0^t x_n(\tau)\, d\tau.$$

Entonces y_n es compacta en $C[0, 1]$ pero no tiene puntos límites en $C^1[0, 1]$. 15.44. a) No. b) No. c) Sí. d) No. e) Sí. f) No. g) Sí. 15.45. Será, sólo si $\varphi(t) \equiv 0$. 15.46. Si el conjunto compacto M no fuera nun-

ca denso, su adherencia contendría una bola, lo que contradice al teorema 15.4. 15.47. Demostrarlo empleando la inducción según k. 15.51. a) Si, y sólo si, $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^2 < \infty$. b) Si, y sólo si, $\lambda_n \to 0$ cuando $n \to \infty$.

15.52. Si L es un subespacio de $C[a, b]$ compuesto de funciones continuamente diferenciables y $x_n \in L$, $x_n \to x_0$ según la norma $C^1[a, b]$, entonces $x_n \to x_0$ también según la norma $C[a, b]$, por lo tanto, $x_0 \in L$. De este modo sobre L se pueden introducir dos normas y obtener dos espacios de Banach $LC[a, b]$ y $LC^1[a, b]$. El operador idéntico J: $LC^1[a, b] \to LC[a, b]$, $Jx = x$ es lineal y continuo. Por eso, el operador J^{-1} es continuo, ambas normas sobre L son equivalentes, la bola unitaria en $LC[a, b]$ es acotada respecto a la norma $LC^1[a, b]$ y, por lo tanto, compacta. En virtud del teorema 15.4 el subespacio L es de dimensión finita. 15.55. Emplear el teorema 15.6 y el problema 13.23. 15.57. Considerar la sucesión $x_n(t) = t^n$ $(n \in \mathbb{N})$.

§ 16.

16.1. a) No. Considerar Ax_n, donde $x_n = t^n$ $(n \in \mathbb{N})$. b) Sí. c) Sí. d) Sí. e) No. 16.2. No. Considerar Ax_n, donde $x_n = t^{2n}$. 16.3. Solamente para $\varphi(t) \equiv 0$. 16.4. Emplear el teorema 16.2. 16.5. a) No. Considerar Ax_n, donde $x_n = t^n/n$ $(n \in \mathbb{N})$. b) No. Considerar Ax_n, donde $x_n = t^{n+1}/n_{(n+1)}$ $(n \in \mathbb{N})$. c) Sí. El operador A transforma la bola $\overline{S}_1(0)$ del espacio $C^2[0, 1]$ en el conjunto M que se encuentra en la bola $S = \overline{S}_f(0)$ espacio $C^1[0, 1]$ y todo subconjunto S es compacto en $C[0, 1]$. 16.8. a) No. b) Sí. Emplear el problema 15.50. c) Sí. Emplear el problema 16.3. 16.10. No. 16.12.

$$A^{-1}y = \int_0^1 G(s, t)\, y(t)\, dt, \quad \mathcal{D}(A^{-1}) = C[0, 1],$$

donde $G(s, t) = \begin{cases} s(t-1) & \text{para } 0 \leqslant s \leqslant t \leqslant 1, \\ t(s-1) & \text{para } 0 \leqslant t \leqslant s \leqslant 1. \end{cases}$

16.15. Solamente si X es de dimensión finita. 16.16. a) Sí. b) No. En este caso A puede no ser continua. c) Sí. 16.17. No. Considerar la sucesión de operadores P_n: $l_2 \to l_2$, $P_n x = (x_1, x_2, \ldots, x_n, 0, 0, \ldots)$ para $x = (x_1, x_2, \ldots) \in l_2$. 16.18. Considerar la sucesión de operadores $A_n = AP_n$, donde P_n es el operador del problema anterior. 16.19. Para $x = (x_1, x_2, \ldots) \in l_2$, sea $Ax = (y_1, y_2, \ldots)$. Considerar la sucesión $A_n x = (y_1, y_2, \ldots, y_n, 0, 0, \ldots)$. 16.20. Sea $M \subset H$ un conjunto acotado, puesto que es débilmente compacto, existe en él una sucesión débilmente fundamental f_n $(n \in \mathbb{N})$. Entonces $\| A(f_n - f_m) \|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^2 |(f_n - f_m, e_k)|^2 = S_r + R_r$, donde $S_r = \sum_{k=1}^{r}$, $R = \sum_{k=r+1}^{\infty}$. Puesto que $\lambda_k \to 0$, para un r bastante grande será $R_r < \varepsilon^2$ $\sum_{k=r+1}^{\infty} |(f_n - f_m, e_k)|^2 \leqslant \varepsilon^2 \| f_n - f_m \|^2$. Después de dar un valor fijo a r; en virtud de la convergencia débil de la sucesión f_n escojamos un N

tal que para $n, m > N$, en S_r cada sumando no supere ε^2/r; entonces $S_r < \varepsilon^2$, $\| A(f_n - f_m) \|^2 < c\varepsilon^2$ y A es totalmente continuo. 16.21. Si λ_n no tiende a cero cuando $n \to \infty$, existe una subsucesión λ_{n_k} tal, que para todos los $k \in \mathbf{N}$ será $|\lambda_{n_k}| > M > 0$. Tomar $e_k = (0, 0, \ldots, \underbrace{0}_{n_k - 1}, 1, 0, 0, \ldots)$ y demostrar que el conjunto Ae_k no es compacto. 16.22. Definamos la sucesión de operadores $B_n: H \to H$ por medio de las igualdades

$$B_n e_m = \begin{cases} Ae_m & \text{para } m \leqslant n,\ n \in \mathbf{N}, \\ 0 & \text{para } m > 0. \end{cases}$$

Demostrar que B_n son operadores totalmente continuos y que

$$\| A - B_n \| \leqslant \left[\sum_{i=n+1}^{\infty} \| Ae_i \|^2 \right]^{1/2} \to 0,$$

cuando $n \to \infty$. 16.23. Sea $x_n \in H$ una sucesión acotada, entonces $A^* A x_{n_k}$ converge, pero $\| A x_{n_k} - A x_{n_l} \|^2 \leqslant 2 \| x_n \| \| A^* A x_{n_k} - A^* A x_{n_l} \| \to 0$, para $n_k, n_l \to \infty$. 16.24. Si A es totalmente continuo, entonces, en virtud del teorema 16.3 el operador AA^* es totalmente continuo; pero $A = (A^*)^*$ y, por tanto, $(A^*)^* A^*$ es totalmente continuo, conforme al problema 16.23, A^* es totalmente continuo. 16.25. Emplear los teoremas 16.10 y 9.1. 16.27. $R(A) = \bigcup_n A[S_n(0)]$. 16.27. Emplear el teorema 16.4. 16.28. c) $\Rightarrow$ b) coincide con el teorema 16.4. b) $\Rightarrow$ a) es evidente. Demostremos que a) $\Rightarrow$ b). Sea que $x_n \to x$ $(n \to \infty)$ débilmente, entonces $y_n = Ax_n \to y = Ax$ $(n \to \infty)$ débilmente. Por eso,

$$(Ax_n, y_n) = (Ax_n, Ax_n) = \| Ax_n \|^2 \to (Ax, y) = \| Ax \|^2.$$

De este modo, $Ax_n \to Ax$ $(n \to \infty)$ débilmente y $\| Ax_n \| \to \| Ax \|$. Según el problema 13.4 $Ax_n \to Ax$. 16.29. a) $\Rightarrow$ b) $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ y si $x_n \to x$ $(n \to \infty)$ débilmente, para $f \in Y^* A^* f \in X^*$ y $\langle x_n, A^* f \rangle = \langle Ax_n, f \rangle \to \langle Ax, f \rangle$, por eso $Ax_n \to Ax$ $(n \to \infty)$ débilmente. b) $\Rightarrow$ c) Toda sucesión convergente es débilmente convergente. c) $\Rightarrow$ a) Sea a) incorrecto; entonces existe una sucesión $x_n \in X$ tal, que $x_n \to 0$, pero Ax_n es distinta de cero cuando $n \to \infty$. Puede considerarse que para todos los $nx_n \neq 0$. Hagamos $\alpha_n = x_n / \sqrt{\| x_n \|}$; entonces $\| \alpha_n \| = \sqrt{\| x_n \|}$ y $\alpha_n \to 0$ cuando $n \to \infty$, pero $A\alpha_n = Ax_n / \sqrt{\| x_n \|}$ no es acotada y, por consiguiente, no es débilmente convergente, lo que contradice a c). 16.30. Emplear el teorema 15.6. 16.31. Emplear el problema 13.13. 16.32. Si A es totalmente continuo, la afirmación se deduce de los teoremas 16.5 y 16.4. Por el contrario, si Y es separable, todo conjunto acotado en Y^* es débilmente compacto ([25], pág. 211), por eso A^* y, por lo tanto también A, son totalmente continuos. 16.33. a) Aprovechar el hecho de que M es débilmente compacto y débilmente cerrado. b) Aprovechar el hecho de que el conjunto $A(M)$ es bicompacto. 16.35. a) No. Considerar el operador $A: C[-1, 1] \to C[-1, 1]$,

$$Ax(t) = \int_0^t x(\tau)\, d\tau.$$

Entonces $x_0(t) = |t| \notin A(\overline{S_1}(0))$, pero $x_n(t) = \sqrt{t^2 + 1/n^2} \in A(\overline{S_1}(0))$ y $x_n(t) \to x_0(t)$ cuando $n \to \infty$. b) Sí. 16.36. El conjunto $A(\overline{S_1}(0))$ es bicompacto conforme al problema 16.34; por lo tanto, en éste existe un elemento con la norma máxima. 16.37. a) No. b) Sí. 16.38. Emplear el teorema 16.9. 16.39. a), b) Solamente si X es de dimensión finita. c) Sí. 16.40. No. 16.41. Solamente si X es de dimensión finita. 16.42. No. En el espacio $C[0, \pi]$ consideremos el operador $Ax(t) = x(t)$ sen t; entonces la ecuación $z - Az = 0$ tiene solamente la solución nula, pero la ecuación $x(t)(1 - \text{sen } t) = y(t)$ no tiene solución para $y(t) \equiv 1$. 16.44. Aplicando el operador B^{-1} a ambos miembros de la ecuación $(B - A)x = y$, obtenemos la ecuación $I - B^{-1}Ax = B^{-1}y$, donde $B^{-1}A \in \sigma(X)$. 16.45. a) La ecuación $x - Ax = 0$ tiene solamente solución nula.

$$\text{b) } (I-A)^{-1}y(t) = y(t) + e^t \int_0^t y(\tau)\, e^{-\tau}\, d\tau.$$

16.48. a) Supongamos que la sucesión $R(A^k)$ decrece estrictamente. Según el lema sobre la casi perpendicular ([25], pág. 35) para cualquier $k \in \mathbf{N}$ existe un $x_k \in R(A^k)$ tal, que $\|x_k\| = 1$ y $\|x_k - z\| \geqslant 1/2$ para cualquier $z \in R(A^{k+1})$. Entonces $Bx_k = Ax_k - x_k$ poseo la propiedad de que $\|Bx_k - Bx_l\| \geqslant 1/2$ para $k < l$, pero el operador B es totalmente continuo, es decir, existe una contradicción. b) Emplear los teoremas 16.3, 16.7 y el teorema 1 en la pág. 220 en [25]. b) Emplear el problema 4.49 b) y el teorema 9.2. 16.49. a), b) Sean e_i, e_i' bases en H, $\sum_i \|Ae_i\|^2 < \infty$. Entonces

$$\sum_i \|Ae_i'\|^2 = \sum_i \sum_j |(Ae_i', e_j)|^2 = \sum_j \|A^*e_j\|^2 =$$

$$= \sum_j \sum_i |(e_i, A^*e_j)|^2 = \sum_i \sum_j |(Ae_i, e_j)|^2 = \sum_i \|Ae_i\|^2 < \infty.$$

c) Sea $x \in H$, $\|x\| = 1$, entonces $x = \sum_i \alpha_i e_i$, donde $\sum_i \alpha_i^2 = 1$.

Pero $\|Ax\|^2 = \sum_j |(Ax, e_j)|^2 = \sum_j \left| \sum_i \alpha_i (Ae_i, e_j) \right|^2 \leqslant$

$$\leqslant \sum_j \left(\sum_i \alpha_i^2 \sum_i |(Ae_i, e_j)|^2 \right) = \sum_j \sum_i |(Ae_i, e_j)|^2 = \sum_i \|Ae_i\|^2.$$

De este modo $\|Ax\| \leqslant \|A\|_2$ para cualquier $x \in H$ tal, que $\|x\| = 1$. g) Sea A_n fundamental según $\|\cdot\|_2$. Entonces es también fundamental según la norma ordinaria y, por consiguiente $A_n \to B$. Al mismo tiempo existe un M tal, que $\|A_n\|_2 < M$ para todos los $n \in \mathbf{N}$. Puesto que para cualquier j $A_n e_j \to Be_j$, para cualquier n existe un m tal, que $\sum_{j=1}^{n} \|A_m e_j - Be_j\|^2 < 1$. De aquí, $\sum_{j=1}^{n} \|Be_j\|^2 \leqslant$ $\leqslant 1 + M$ y B es un operador de Hilbert—Schmidt. Queda por demostrar que $A_n \to B$ en el sentido de $\|\cdot\|_2$. h) De modo análogo al

problema 16.22. i) Emplear la desigualdad de Bessel en el espacio $L_2[0, 1] \times [0, 1]$. k) $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^2 < \infty$. l) El operador del problema anterior con $\lambda_n = 1/\sqrt{n}$. 16.50. a) Emplear el problema 16.49 j). b) Si $A = BC$, $AD = B\ (CD)$ y $DA = (DB)\ C$. c) $A^* = C^*B^*$ siendo C^*, B^* operadores de Hilbert—Schmidt según el problema 16.49 b). d) $|(Ae_n, e_n)| = |(BCe_n, e_n)| = |(Ce_n, B^*e_n)| \leqslant 1/2\ \{\|Ce_n\|^2 + \|B^*e_n\|^2\}$. 16.51. El operador $A: l_2 \to l_2$, $Ax = (\lambda_1 x_1, \lambda_2 x_2, \ldots)$ para $x = (x_1, x_2, \ldots) \in l_2$ con $\lambda_n = 1/n$ es un operador de Hilbert—Schmidt en virtud de problema 16.49 k), pero no es nuclear en virtud del problema 16.50 d).

§ 17.

17.1. $\langle y, \psi\rangle = \langle Ax, \psi\rangle = \langle x, A^*\psi\rangle = 0$. 17.2. Si $y \in R(A)$, $\langle y, \psi\rangle = 0$ según el problema anterior. 17.3. Sea $y \in \overline{R(A)}$; entonces existe una sucesión $y_n \in R(A)$ tal, que $y_n \to y$ cuando $n \to \infty$. Pero $\langle y_n, \psi\rangle = 0$ y debido a la continuidad de ψ $\langle y, \psi\rangle = 0$ cuando $n \to \infty$. 17.7. La definición de resolubilidad normal de A se puede escribir de la forma $R(A) = {}^{\perp}N(A^*)$. Además, emplear el problema 17.5. 17.10. Aprovechar el hecho que el número de ceros de A es igual a $k - r$ y su número defectivo equivale a $m - r$, donde r es el rango de la matriz A. 17.14. b) $\chi(A) = -1$, $\chi(A^*) = 1$. c) $\chi(A^k) = -k$, $\chi(A^{*k}) = k$. 17.17. No 17.19. No, puesto que

$$A^*z(t) = \int_t^1 z(s)\, ds,$$

de donde $N(A^*) = \{0\}$. De la resolubilidad de A se deduciría (problema 17.8) que $R(A) = Y$. No es así: las funciones de $R(A)$ son continuas y equivalen a 0 cuando $t = 0$. 17.20. Si $y_n = Ax_n$ donde $x_n \in D(A)$ e $y_n \to y_0$ $(n \to \infty)$, entonces $\|x_n - x_l\| \leqslant m^{-1}\|y_n - y_l\| \to 0$ $(n, l \to \infty)$. Pero entonces, debido a la completitud de X, existe un $x_0 \in X$ tal, que $x_n \to x_0$ cuando $n \to \infty$. En virtud del carácter cerrado de $Ax_0 \in D(A)$ e $y_0 = Ax_0$, es decir, $y_0 \in R(A)$. Por lo tanto, $R(A)$ es cerrado. 17.21. Emplear el corolario 2 del teorema 12.1. Tomemos φ_1 y designemos la variedad lineal de elementos $\varphi_2, \ldots, \varphi_n$ por L_1. Hallemos un γ_1 tal, que $\langle \varphi_1, \gamma_1\rangle = 1$, $\langle x, \gamma_1\rangle = 0$ sobre L_1. De modo análogo hallemos $\gamma_2, \ldots, \gamma_n$. 17.23. Sea que $y_1, \ldots, y_n$ son linealmente independientes y su variedad lineal tiene intersección nula con $\widetilde{Y}$. Según el problema 17.21, existen funcionales $f_1, \ldots, f_n$, $f_i \in \widetilde{Y}^{\perp}$. 17.24. Para $n = 1$ la afirmación es evidente. Sea que es válida para $\psi_1, \ldots, \psi_{n-1}$ y que $\{\psi_i\}_{i=1}^{n-1}$ y $\{z_l\}_{l=1}^{n-1}$ son biortogonales. Para cualquier $x \in X$ consideremos el elemento $y = x - \sum_{l=1}^{n-1} \langle x, \psi_l\rangle z_l$ y observemos que $\langle y, \psi_i\rangle = 0$ $(i = 1, \ldots, n-1)$. Pero $\langle y, \varphi_n\rangle = 0$ es imposible para $x \in X$, en caso contrario el sistema $\{\psi_i\}_{i=1}^{n}$ sería linealmente dependiente. Por lo tanto, existe una $x_n \in X$ tal, que $\langle x_n, \psi_n\rangle \neq 0$. Otra solución se desprende del proble-

ma 17.23. Descompongamos ψ_l respecto a la base $\{f_l\}_{l=1}^n$ y busquemos z_k en la forma de descomposición respecto a la base $\{y_j\}_{j=1}^n$, exigiendo la biortogonalidad de los sistemas $\{z_k\}_{k=1}^n$ y $\{\psi_l\}_{l=1}^n$. Si la primera descomposición se da por medio de la matriz T, no es difícil comprobar que la segunda se da mediante la matriz $(T')^{-1}$.

17.25. $\langle Kx, f\rangle = \sum_{i=1}^{n} \langle x, \gamma_l\rangle \langle z_i, f\rangle = \left\langle x, \sum_{i=1}^{n} \overline{\langle z_i, f\rangle}\, \gamma_i \right\rangle$.

17.26. Si $\widetilde{A}x = 0$, entonces $Ax = -Kx$, o sea, $Ax = -\sum_{i=1}^{n} \xi_i z_i$, donde $\xi_i = \langle x, \gamma_l\rangle$ $(i = 1, \ldots, n)$. Pero $\langle Ax, \psi_j\rangle = 0 = \xi_j$, de donde $Ax = 0$, es decir, $x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_l \varphi_l$ y $0 = \xi_l = \langle x, \gamma_l\rangle = \alpha_l$, o sea, $x = 0$

De modo análogo $N(A^*) = \{0\}$. 17.27. Para cualquier $y \in Y$ existe un $x \in X$ tal, que $Ax = y$. Se puede hacer $x = \widetilde{x} + \sum_{i=1}^{n} (\langle y, \psi_l\rangle - \langle \widetilde{x}, \gamma_l\rangle) \varphi_l$, donde $\widetilde{x}$ es solución de la ecuación $Ax = y - \sum_{i=1}^{n} \langle y, \psi_l\rangle z_l$.

17.28. Corolario de los problemas 17.26 y 17.27. 17.30. $A = \widetilde{A} - K$, es decir, $B = \widetilde{A}$, $P = -K$. 17.31. $C = \widetilde{A}$, $T = -K$, ya que el operador de dimensión finita es totalmente continuo (véase el problema 16.16 b)). 17.32. Emplear la igualdad $A = C[I + C^{-1}T]$. 17.33. Corolario de los problemas 17.30—17.32. 17.34. El sistema $\{y_l\}_{l=1}^n$ es linealmente independiente. En Y^* escogemos un sistema $\{\psi_j\}_{j=1}^n$ biortogonal a $\{y_l\}_{l=1}^n$ y ortogonal a $R(A)$. Entonces $\{\psi_j\}_{j=1}^n \subset N(A^*)$, de donde $\dim N(A^*) \geqslant n$. Si $\psi \in N(A^*)$ tomamos $\psi = \sum_{i=1}^{n} \langle y_i, \psi\rangle \psi_l + f$. Ahora, para cualquier $y \in Y$ será $\langle y, f\rangle = 0$, de donde $f = 0$, es decir, $\dim N(A^*) = n$. 17.35. a) De la definición de operador no negativo se desprende que $(r^2 AA^* x x) \geqslant |(x, y)|^2$. Si $x \in N(A^*)$, entonces $(x, y) = 0$ y, entonces, $y \in R(A)$. b) $(AA^*)^* = AA^*$ y, si $AA^* x = 0$, entonces $x \in N(A^*)$ y $(x, y) = 0$.

Capítulo 5

§ 18.

18.1. $\lambda_n \geqslant 0$. 18.7. $(Ax, y) = \frac{1}{4}\{(A(x+y), x+y) - (A(x-y), x-y) + \frac{i}{4}\{(A(x+iy), x+iy) - (A(x-iy), x-iy)\}$. Cambiando aquí de lugares x e y, obtenemos que $(Ax, y) = \overline{(Ay, x)} = (x, Ay)$. 18.8. En general, no. Considerar el operador

A: $l_2 \to l_2$, $Ax = (x_1, x_2/2, x_3/3, \ldots)$ para $x = (x_1, x_2, \ldots) \in l_2$. 18.9. Si $(Ax, x) = 0$ para cualquier $x \in H$, $(A(x + h), x + h) = (Ax, h) + (Ah, x) = 0$ para cualquier $h \in H$. Tomando $h' = ih$, obtenemos $(Ax, h') + (Ah', x) = 0$ o $-(Ax, h) + (Ah, x) = 0$, por eso $(Ax, h) = 0$, $Ax = 0$ y $A = 0$. En el espacio real la afirmación no es válida (en el espacio E^2, considerar el operador del giro en el ángulo $\pi/2$). 18.10. La afirmación es válida para todo operador lineal acotado. 18.11. a) No. Poner un ejemplo en E^2. b) Sí. El carácter cerrado de N se deduce del problema 18.10. Es obvio que de $x \in N$ se desprende $\lambda x \in N$ para cualquier $\lambda \in C$. Sean $x, y \in N$; entonces $(A(x + y), x + y) = (Ax, y) + (Ay, x) = 2\mathrm{Re}\,(Ax, y) \geqslant 0$. Por otro lado, $(A(x - y), x - y) = 2\mathrm{Re}\,(Ax, y) \geqslant 0$. Por eso $\mathrm{Re}\,(Ax, y) = 0$. $(A(x + y), x + y) = 0$ y $x + y \in N$. 18.12. b) $A_1 = \frac{1}{2}(A + A^*)$, $A_2 = \frac{1}{2i}(A - A^*)$. 18.13. Sí. Considerar el operador del problema 18.8. 18.14. Emplear el problema 14.7 c). 18.15. Para el operador autoconjugado A^2 emplear el problema 18.6 a). 18.18. Si $A^n x = 0$, entonces $0 = (A^n x, A^{n-2}x) = (A^{n-1}x, A^{n-1}x) = \| A^{n-1}x \|^2$ por lo tanto, $A^{n-1}x = 0$. 18.19. b) Demostrar que la sucesión α_n no decrece y está acotada superiormente. 18.20. b) $\Rightarrow$ c) Sea que $x \neq 0$, $(Ax, x) = 0$. Entonces $(Ax, x) = (\sqrt{A}x, \sqrt{A}x) = \| \sqrt{A}x \|^2 = 0$, de donde $\sqrt{A}x = 0$ y $Ax = 0$, $N(A) \neq 0$. 18.21. c) $\Rightarrow$ a) $Px - P^2x = 0$, por lo tanto, $(I - P)x \in N(P)$ para cualquier $x \in H$, por eso $(Px, y) = (Px, Py + (I - P)y) = Px, Py)$ para cualesquiera $x, y \in H$ o $(Px, y) = (Px, Py) = (x, Py)$. d) $\Rightarrow$ a) $\| Px \|^2 = (Px, x) = (x, P^*x)$, y por ser real el segundo miembro, $(x, P^*x) = (P^*x, x)$. De esta manera, $(Px, x) = (P^*x, x)$ para cualquier $x \in H$ y, en virtud del problema 18.9, $P = P^*$. 18.24. $((C^*AC - C^*BC)x, x) = ((A - B)Cx, Cx) \geqslant 0$. 18.25. Utilizar el problema 18.9. 18.26. No. En el espacio E^2, considerar los operadores dados por las matrices

$$A = \begin{Vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{Vmatrix}, \quad B = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{Vmatrix}.$$

18.28. Emplear el problema 18.6. a) 18.29. $(A^{-1}x, y) = (A^{-1}x, AA^{-1}y) = (x, A^{-1}y)$. 18.30. $(A^{-1}x, x) = (A^{-1}x, AA^{-1}x) = (A(A^{-1}x), A^{-1}x) \geqslant 0$. 18.31. Sea que $\lambda = \alpha + i\beta$ $(\beta \neq 0)$. Entonces $\| (A - \lambda I)x \|^2 = \| (A - \alpha I)x \|^2 + \beta^2 \| x \|^2 \geqslant \beta^2 \| x \|^2$. 18.34. Demostrar que $\| (A + \lambda I)x \| \geqslant \lambda \| x \|$. 18.35. Emplear el teorema 9.1. 18.36. $\| x \|^2 = (Ix, x) \leqslant (Ax, x) = \| \sqrt{A}x \|^2$. De aquí $N(\sqrt{A}) = 0$ y en virtud de la desigualdad $\| \sqrt{A}x \| \geqslant \| x \|$, el operador $\sqrt{A}$ es continuamente invertible, y, entonces, existe y es continuo el operador $A^{-1} = [(\sqrt{A})^{-1}]^2$. Además, $(A^{-1}x, x) = \| A^{-1/2}x \|^2 \leqslant \| x \|^2 = (x, x)$. Ahora mostremos que $B^{-1} \leqslant A^{-1}$. En la desigualdad $(Ax, x) \leqslant (Bx, x)$ tomemos $x = A^{-1/2}y$; entonces $(A^{1/2}y, A^{-1/2}y) = \| y \|^2 \leqslant (BA^{-1/2}y, A^{-1/2}y) = (A^{-1/2}BA^{-1/2}y, y)$. De aquí, igual que antes se deduce que el operador $A^{-1/2}BA^{-1/2}$ es continuamente invertible y $(A^{-1/2}BA^{-1/2})^{-1} \leqslant I$, es decir, $A^{1/2}B^{-1}A^{1/2} \leqslant I$ de donde, en virtud del problema 18.24, $B^{-1} \leqslant A^{-1}$. 18.38. Emplear el problema 18.24. 18.39. $\sqrt{A} = A$. 18.40. Emplear el problema 18.15. 18.41. $\sqrt{A}x = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ x_1 + 2x_2 \end{pmatrix}$. 18.47. b) Sea que $B^2 = A$. Si $N(B) = 0$, entonces

$N(B^2) = N(A) = 0$. Si $N(B) \subset N(B)^2 = N(A)$, $N(B)$ es un subespacio unidimensional engendrado por el elemento e_1. Además, $Ae_2 = B^2e_2 = e_1/2$, por eso $BB^2e_2 = Be_1/2 = 0$, o sea, $ABe_2 = 0$, de donde $Be_2 = \lambda e_1$ y $Ae_2 = B(Be_2) = B(\lambda e_1) = 0$, lo que es una contradicción. 18.48. Demostremos la unicidad. Si B_1, $B_2 \in \delta(H)$, B_1, $B_2 \geqslant 0$, $\| Ax \| = \| B_1x \| = \| B_2x \|$, entonces $(B_1^2x, x) = \| B_1x \|^2 = \| B_2x \|^2 = (B_2^2x, x)$, de donde $B_1^2 = B_2^2$ y $B_1 = B_2$. En calidad de B tomamos el operador $\sqrt{A^*A}$. 18.49. Emplear el problema 14.15. 18.53. $\| A_n^*x \|^2 = (A_n^*x, A_n^*x) = \| A_nx \|^2 \to \| Ax \|^2 = (Ax, Ax) = (A^*Ax, x) = \| \sqrt{A}^*x \|^2$. De aquí $\| A_n^*x - A^*x \|^2 = \| A_n^*x \|^2 - (A^*x, A_n^*x) - (A_n^*x, A^*x) + \| A^*x \|^2 \to 0$, cuando $n \to \infty$. 18.54. Sea que $x_n \to 0$ $(n \to \infty)$ débilmente. Como A es totalmente continuo, $Ax_n \to 0$, pero $(Ax_n, x_n) = (\sqrt{A}x_n, \sqrt{A}x_n) = \|\sqrt{A}x_n\|^2$. Por eso, $\sqrt{A}x_n \to 0$ y $\sqrt{A}$ es un operador totalmente continuo. 18.55. Sea que $x_n \to 0$ $(n \to \infty)$ débilmente. Puesto que B es totalmente continuo, entonces $(Bx_n, x_n) \to 0$. Pero $0 \leqslant (Ax_n, x_n) \leqslant (Bx_n, x_n)$, por eso $(Ax_n, x_n) \to 0$ y, por lo tanto, $\sqrt{A}x_n \to 0$. Como $\sqrt{A}$ es continuo, $\sqrt{A}(\sqrt{A}x_n) = Ax_n \to 0$. 18.56. a) Demostrar que $\| U(\lambda x) - \lambda Ux \|^2 = 0$ y $\| U(x + y) - Ux - Uy \|^2 = 0$. b) Emplear la igualdad $\| Ux \| = \| x \|$ y el hecho de que $R(U) = H$. d) Si A es un operador isométrico, $(Ax, Ay) = \dfrac{1}{2}[(Ax + y), A(x + y) - (Ax, Ax) - (Ay, Ay)] = \dfrac{1}{2}[\| x + y \|^2 - \| x \|^2 - \| y \|^2 = (x, y)$. 18.57. b) $(Ux, Uy) = (AB^{-1}x, AB^{-1}y) = (A^*AB^{-1}x, B^{-1}y) = (B^2B^{-1}x, B^{-1}y) = (Bx, B^{-1}y) = (x, BB^{-1}y) = (x, y)$.

§ 19.

19.2. No. 19.4. a) Al valor propio $\lambda = 1$ le corresponde el subespacio propio de funciones pares; al valor propio $\lambda = -1$, el subespacio de funciones impares. b) $\lambda_1 = \pi$, $x_1(t) = \cos t$, $\lambda_2 = -\pi$, $x_2(t) = \operatorname{sen} t$; al valor propio $\lambda = 0$, le corresponde el subespacio propio $\{\alpha \operatorname{sen} t + \beta \cos t\}^{\perp}$, donde α, $\beta \in \mathbf{R}$ son arbitrarios y la ortogonalidad se entiende en el sentido del espacio real $L_2 = [-\pi, \pi]$. 19.5. a) $\lambda_n = -n^2$, $x_n(t) = \operatorname{sen} nt$ $(n = 1, 2, \ldots)$. b) $\lambda_0 = 0$, $x_0(t) = 1$, $\lambda_n = -n^2$, $x_n(t) = \cos nt$ $(n = 1, 2, \ldots)$. c) $\lambda_0 = 0$, $x_0(t) = 1$, $\lambda_n = -4n^2$, $x_n(t) = \cos 2nt$, $\operatorname{sen} 2nt$ $(n = 1, 2, \ldots)$. 19.7. Sea que existe $(A - \lambda I)^{-1}$. Multiplicar ambos miembros de la igualdad $A(A - \lambda I) = (A - \lambda I)A$ por $(A - \lambda I)^{-1}$ a la izquierda. 19.8. Cerciorarse de que es válida la igualdad $(R_\lambda(A) - R_\mu(A))(A - \mu I) \cdot (A - \lambda I) = (\lambda - \mu) I$. 19.10. Si $AB = BA$, $B(A - \lambda I) = (A - \lambda I)B$, y, multiplicando ambos miembros de la última igualdad por R_λ a la derecha y a la izquierda, obtenemos la afirmación requerida. Si para cierto λ es válida la igualdad $R_\lambda B = BR_\lambda$, multiplicando ambos miembros por $A - \lambda I$ a la izquierda y a la derecha, obtenemos que $B(A - \lambda I) = (A - \lambda I)B$ o $AB = BA$. 19.11. Aprovechar el hecho de que el operador $A - \lambda I$ es continuamente invertible, $B - A = (B - \lambda I) - (A - \lambda I)$, y el teorema 9.4. 19.12. Aprovechar el hecho de que $A - (\lambda - \mu) I = A - \lambda I + \mu I$ y el teorema 9.4. 19.13. Si, y sólo si X es de dimensión finita. 19.16. $\sigma(A)$ se compone del valor propio $\lambda = 1$ con el subespacio propio engendrado por la función

$x(t) = t$ y del valor propio $\lambda = 0$ con el subespacio propio $\{x(t) \in C[0, 1]: x(0) = x(1) = 0\}$, $r_\sigma(A) = 1$, $R_\lambda(A)\, y(t) = -\frac{1}{\lambda} y(t) + \frac{y(0)}{\lambda(1-\lambda)} + \frac{ty(1)}{\lambda(1-\lambda)} - \frac{ty(0)}{\lambda(1-\lambda)^2}$. **19.17.** El espectro se compone del valor propio $\lambda = 1$ con el subespacio propio M y el valor propio $\lambda = 0$ con el subespacio propio $M^\perp$. $R_\lambda(P) = \frac{P}{1-\lambda} - \frac{(I-P)}{\lambda}$. **19.18.** $\sigma(A)$ se compone solamente del punto $\lambda = 0$ y

$$R_\lambda(A)\, y = -\frac{1}{\lambda} y - \frac{1}{\lambda^2} \int_0^t e^{\frac{1}{\lambda}(s-t)}\, y(s)\, ds.$$

19.20. En el plano complejo, $\sigma(A)$ coincide con la adherencia del conjunto $\{\lambda_i\}$. **19.21.** Emplear el problema 19.20. **19.23.** Sea que $\lambda \neq 0$, el operador $(AB - \lambda I)^{-1}$ existe y $C = (AB - \lambda I)^{-1}$. Comprobar que $(BA - \lambda I)^{-1} = \frac{-1}{\lambda}[I - BCA]$. **19.26.** Sea que $\lambda \neq 0$, $\lambda \in \sigma(A^{-1})$. Entonces el operador $A^{-1} - \lambda I$ no es continuamente invertible y, por lo tanto, $A(A^{-1} - \lambda I) = I - \lambda A = -\lambda\left(A - \frac{1}{\lambda} I\right)$ tampoco lo es. **19.27.** Emplear el problema 18.50. c). **19.28.** Sea que $\lambda \neq 0$, $x \neq 0$, $AA^*x = \lambda x$. Entonces $A^*x \neq 0$ y $(A^*A)(A^*x) = \lambda(A^*x)$ y de modo análogo, viceversa. **19.29.** El punto $\lambda = 0$ pertenece al espectro, pero no representa un valor propio para $k \not\equiv 0$. **19.30.** Emplear el problema 18.15. **19.32.** Sea $\varepsilon > 0$. Se hallará un N tal, que

$$\sup_{n>N} \| A^n \|^{1/n} < r_\sigma(A) + \varepsilon, \quad \sup_{n>N} \| B^n \|^{1/n} < r_\sigma(B) + \varepsilon.$$

Entonces para $n > 2N$

$$\| (A+B)^n \| = \Big\| \sum_{k=0}^{n} C_n^k A^k B^{n-k} \Big\| \leqslant \sum_{k=0}^{n} C_n^k \| A^k \| \, \| B^{n-k} \| \leqslant$$

$$\leqslant (r_\sigma(A) + r_\sigma(B) + 2\varepsilon)^n + \sum_{k=0}^{N} C_n^k \| A^k \| \, \| B^{n-k} \| +$$

$$+ \sum_{k=n-N}^{N} C_n^k \| A^k \| \cdot \| B^{n-k} \| \leqslant (r_\sigma(A) + r_\sigma(B) + 2\varepsilon)^n +$$

$$+ \sum_{k=0}^{N} C_n^k \| A^k \| (r_\sigma(B) + \varepsilon)^{n-k} + \sum_{k=0}^{N} C_n^k \| B^k \| (r_\sigma(A) + \varepsilon)^{n-k}.$$

De aquí

$$\frac{\| (A+B)^n \|}{(r_\sigma(A) + r_\sigma(B) + 2\varepsilon)^n} \leqslant 1 + cq^n, \quad q < 1,$$

y cuando $n \to \infty$ $r_\sigma(A + B) \leqslant r_\sigma(A) + r_\sigma(B) + 2\varepsilon$. La segunda desigualdad se establece partiendo de la desigualdad $\|(AB)^n\| \leqslant \| A^n \| \cdot \| B^n \|$ válida para los operadores conmutadores.

§ 20.

20.1. $\sigma(A)$ se compone del punto de un espectro continuo $\lambda = 0$. 20.2. $\sigma(A)$ consta del punto $\lambda = 0$ que es un valor propio de multiplicidad infinita. 20.3. $\sigma(A)$ se compone del punto $\lambda = 0$, un valor propio de multiplicidad infinita, y los valores propios λ_1, λ_2 que son raíces de la ecuación $240\lambda^2 - 32\lambda - 1 = 0$ y para los cuales los subespacios propios son unidimensionales. 20.4. Sea que $y_n \in R(A - \lambda I)$, $y_n \to y$ cuando $n \to \infty$; entonces $y_n = (A - \lambda I)\, x_n$. Si x_n contiene una subsucesión acotada, en virtud de la continuidad completa del operador A, cierta subsucesión Ax_{n_k} converge; por lo tanto, $x_{n_k} = \frac{1}{\lambda}(Ax_{n_k} - y_{n_k}) \to x_0$, de donde $y = (A - \lambda I)\, x_0$, $y \in R(A - \lambda I)$. Pero si x_n no contiene ninguna subsucesión acotada, entonces $\| x_n \| \to +\infty$ cuando $n \to \infty$ y, tomando $z_n = x_n / \| x_n \|$, repetimos la demostración anterior. 20.6. Emplear la afirmación del problema 18.50 b) aplicándola al operador $A - \lambda I$. 20.7. $\sigma(A) = [0, 1]$, además, todos los puntos son de un espectro continuo. 20.8. Sea que $\lambda = \alpha + i\beta$, $y = (A - \lambda I)\, x$. Entonces $(x, y) - (y, x) = 2i\beta \| x \|^2$, de donde $\| y \| \geqslant |\beta| \cdot \| x \|$ o $\| Ax - \lambda x \| \geqslant |\beta| \cdot \| x \|$. Según el teorema 9.1 $\lambda \in \rho(A)$. Si $\lambda < m$, $\| (A - \lambda I)\, x \| \geqslant m - \lambda$ para $\| x \| = 1$ y volvemos a emplear el mismo teorema. 20.10. Emplear el problema 18.14. 20.11. Si $R(A - \lambda I) = H$, entonces λ no es valor propio y existe el operador $(A - \lambda I)^{-1}$. Más adelante utilizar el problema 18.49. 20.14. Sí. 20.16. A está definido sobre todo el H y es totalmente continuo en virtud del problema 16.20. Comprobamos directamente que para cualesquiera $x, y \in H$ es válida la igualdad $(Ax, y) = (x, Ay)$. En virtud del problema 18.49 A es autoconjugado. 20.17. $\sigma(A)$ consta de valores propios de tipo $\lambda_n = 1/(n^2\pi^2)$ con las funciones propias correspondientes $x_n = \operatorname{sen} n\pi t$ $(n \in \mathbf{N})$. Diferenciar dos veces ambos miembros de la ecuación $Ax = \lambda x$. 20.18. Consideremos el subespacio propio L del operador A (L corresponde al valor propio $\lambda = 1$); entonces L es invariante respecto a A y, como A es autoconjugado, $L^\perp$ es, también, invariante respecto a A. Si $Ax = 0$ para cualquier $x \in L^\perp$, la afirmación queda demostrada. En caso contrario, en el subespacio $L^\perp$ el operador A tendría un punto de espectro diferente de $\lambda = 0$ y $\lambda = 1$. 20.19. b) $(A^*Ax, x) = \sum_n (x, h_n)^2 \mu_n$. El hecho de que $\mu_n > 0$ para todo n, se desprende del carácter no negativo del primer miembro. c)

$$(e_n, e_k) = \frac{1}{\lambda_n} Ah_n, \frac{1}{\lambda_k} Ah_k = \frac{1}{\lambda_n \lambda_k} (h_n, A^*Ah_k) = \frac{\mu_k}{\lambda_k \lambda_n} (h_n, h_k) = 0,$$

y para $k = n$, se tiene de anterior que $\| e_n \|^2 = \frac{\mu_n}{\lambda_n^2} \| h_n \|^2 = 1$.

A continuación demostramos que la serie converge, estimando su resto

$$\Big\| \sum_{n=k}^{k+p} \lambda_n (x, h_n)\, e_n \Big\|^2 = \sum_{n=k}^{k+p} \lambda_n^2 |(x, h_n)|^2 \leqslant \lambda_k^2 \| x \|^2,$$

y como $\lambda_n \to 0$ cuando $n \to \infty$, la serie converge y queda por demostrar que converge precisamente hacia Ax. Esto es suficiente demos-

trarlo para un subconjunto siempre denso H; en calidad del cual se puede tomar la cápsula lineal de todos los vectores propios del operador A^*A (incluyendo los que se encuentran en $N(A)$).

§ 21.

21.1. a) $x(s) \equiv 1$. b) Para $\lambda = 2$ $x(s) = \dfrac{2}{2-\lambda}\operatorname{sen} s$, para $\lambda = 2$ no hay soluciones. c) $x(s) = \operatorname{sen} s$. d) Para $\lambda \neq 2$, $\lambda \neq -6$

$$x(s) = s^2 + \frac{6-\lambda}{6+\lambda}\, s + \frac{\lambda(42-\lambda)}{6(2-\lambda)(6+\lambda)},$$

para $\lambda = 2$ o $\lambda = -6$ no hay soluciones. e) Para $\lambda \neq -5/2$, $\lambda \neq 3/2$ $x(s) = s^4 + \dfrac{35-10\lambda}{35+14\lambda}\, s^2$, para $\lambda = -5/2$ no hay soluciones, para $\lambda = 3/2$ $x(s) = s^4 + \dfrac{5}{14}\, s^2 + Cs$, donde C es arbitrario. f) $x(s) = s + \lambda\pi^3 \operatorname{sen} s$. g) Para $\lambda \neq 1/2$, $\lambda \neq -1/2$ $x(s) = 1 - \dfrac{2}{\pi}\, s - \dfrac{\lambda}{6}\, \dfrac{\pi^2}{1+2\lambda} \cos s$, para $\lambda = -1/2$ no hay soluciones, para $\lambda = 1/2$ $x(s) = C - \dfrac{2}{\pi}\, s + \left(C\,\dfrac{\pi^2}{4} - \dfrac{\pi^3}{3}\right) \cos s$, donde C es arbitrario. h) Para $\lambda \neq -3/2$, $\lambda \neq 3/4$ $x(s) = \dfrac{3\pi\lambda}{2(2\lambda+3)} \operatorname{sen} s + \cos 2s$, para $\lambda = -3/2$ no hay soluciones, para $\lambda = -3/4$ $x(s) = \cos 2s - \dfrac{3\pi}{4} \operatorname{sen} s + C \cos s$, donde C es arbitrario. 21.2. a) $\lambda_1 = 1/\pi$, $\varphi_1 = \operatorname{sen} s + \cos s$, $\lambda_2 = -1/\pi$, $\varphi_2 = \operatorname{sen} s - \cos s$. b) $\lambda_1 = 2/\pi$, $\varphi_1 = \cos s$, $\lambda_2 = -2/\pi$, $\varphi_2 = \operatorname{sen} s$. c) $\lambda_1 = \lambda_2 = -3$, $\varphi = s - 2s^2$. d) $\lambda_1 = \dfrac{5}{2}$, $\varphi_1 = s^2$, $\lambda_2 = \dfrac{3}{2}$, $\varphi_2 = s$.

21.3. $\lambda_k = 2^{k+1}/\pi$, $\varphi_k = \operatorname{sen} ks$ $(k \in N)$. 21.4. a) Para $\lambda \neq 3/2$ es resoluble para cualesquiera α, β, γ y

$$x(s) = \alpha s^2 + \frac{3\beta}{3-2\lambda}\, s + \gamma,$$

donde $\lambda = 3/2$ es resoluble si, y sólo si, $\beta = 0$ y $x(s) = \alpha s^2 + \gamma + Cs$, donde C es arbitrario. b) Para $\lambda \neq \pm 2/\pi$ es resoluble para cualesquiera α, β y

$$x(s) = \frac{2(\alpha - 2\lambda\beta)}{2+\lambda\pi} \operatorname{sen} s + \beta,$$

para $\lambda = 2/\pi$ es resoluble para cualesquiera α, β y

$$x(s) = \frac{\alpha\pi + 4\beta}{2\pi} \operatorname{sen} s + \beta + C \cos s,$$

donde C es arbitrario, para $\lambda = -2/\pi$ es resoluble si, y sólo si, $\alpha\pi + 4\beta = 0$ y $x(s) = \beta + C \operatorname{sen} s$, donde C es arbitrario. c) Para $\lambda \neq 3/2$, $\lambda \neq -3/4$ es resoluble para cualesquiera α, β y

$$x(s) = \alpha s^3 - \frac{15\beta + 12\lambda\alpha}{15 + 20\lambda} s,$$

para $\lambda = 3/2$ es resoluble para cualesquiera α, β y

$$x(s) = \alpha s^3 + Cs^2 - \frac{25\beta - 6\alpha}{15} s,$$

donde C es arbitrario, para $\lambda = -3/4$ es resoluble si, y sólo si, $3\alpha - 5\beta = 0$ y $x(s) = \alpha s^3 + Cs$, donde C es arbitrario. d) Para $\lambda \neq 3/2$, $\lambda \neq -1/2$ es resoluble para cualquier α y $x(s) = \dfrac{3\alpha}{3-2\lambda} s$, para $\lambda = -1/2$ es resoluble para cualquier α y $x(s) = \dfrac{3}{4}(\alpha - C) s + Cs^2$, donde C es arbitrario, para $\lambda = 3/2$ es resoluble si, y sólo si, $\alpha = 0$ y $x(s) = Cs$ donde C es arbitrario. **21.5.** $x(s) = f(s) + \lambda \int_0^{2\pi} \operatorname{sen}(s - 2t) f(t)\, dt$.

21.6. a) $\lambda_n = (n/2 + (\pi n^2)$, $\varphi_n = \operatorname{sen}(\pi/2 + \pi n) s$ $(n \in \mathbf{N})$. b) $\lambda_n = 4n^2 - 1$, $\varphi_n = \operatorname{sen} 2ns$ $(n \in \mathbf{N})$, c) $\lambda_n = (n + 1/2)^2 - 1$, $\varphi_n = \operatorname{sen}(n + 1/2) s$ $(n \in \mathbf{N})$. d) $\lambda_0 = 1$, $\varphi_0 = e^s$, $\lambda_n = -n^2\pi^2$, $\varphi_n = \operatorname{sen} n\pi s + n\pi \cos n\pi s$ $(n \in \mathbf{N})$. e) $\lambda_n = \dfrac{1}{2}(1 + k_n^2)$, $\varphi_n = k_n \cos k_n s + \operatorname{sen} k_n s$ $(n \in \mathbf{N})$, donde k_n son las raíces positivas de la ecuación $2\operatorname{ctg} k = k - 1/k$. f) $\lambda_n = -k_n^2/3$, $\varphi_n = k_n \cos k_n s + \operatorname{sen} k_n s$ $(n \in \mathbf{N})$ donde k_n es la misma cosa que en el problema anterior. **21.7, 21.8.** Emplear el problema **20.19**, **21.9.** a) Los números característicos $\lambda_n = -n^2\pi^2$, las funciones propias $\varphi_n = \operatorname{sen} n\pi s$ $(n \in \mathbf{N})$. Para $\lambda \neq \lambda_n$

$$x(s) = s - \frac{\lambda}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(n(\lambda + n^2\pi^2)} \operatorname{sen} n\pi s,$$

para $\lambda = -n^2\pi^2$ $(n \in \mathbf{N})$ no hay soluciones. b) Los números característicos y las funciones propias están determinados en el problema 21.6 d): $\lambda_0 = 1$, $\varphi_0 = e^s$, $\lambda_n = -\pi^2 n^2$, $\varphi_n = \operatorname{sen} n\pi s + n\pi \cos n\pi s$ $(n \in \mathbf{N})$. Para $\lambda \neq \lambda_k$ $(k \in \mathbf{N})$ $x(s) = \cos \pi s + \dfrac{\lambda}{1+\pi^2}\left[\dfrac{2}{(e-1)(\lambda-1)} e^s - \dfrac{\pi}{\pi^2+\lambda} (\operatorname{sen} \pi s + \pi \cos \pi s)\right]$, para $\lambda = 1$ y $\lambda = -\pi^2$ no hay soluciones, para $\lambda = -n^2\pi^2$ $(n = 2, 3, \ldots)$

$$x(s) = \cos \pi s + \frac{\lambda}{1+\pi^2}\left[\frac{2}{(e-1)(\lambda-1)} e^s - \frac{\pi}{\pi^2+\lambda} \times (\operatorname{sen} \pi s + \pi \cos \pi s)\right] + C[\operatorname{sen} n\pi s + n\pi \cos n\pi s],$$

donde C es arbitrario. **21.11.** a) $x(s) = 2s + 1$, b) $x(s) = s + s^3/6$. c) $x(s) = e^s(1 + s)^2$. d) $x(s) = \frac{1}{2}(e^s + \operatorname{sen} s + \cos s)$. **21.12.** a) La solución exacta es $x(s) \equiv 1$. b) La solución exacta es $x(s) \equiv -1$. c) La solución exacta es $x(s) \equiv -1$. d) La solución exacta es $x(s) = s/2$. e) La ecuación no tiene solución. **21.14.** a), b) No. c) Sí. **21.15.** a) $x(t) \equiv 1$. b) $x(t) = 2 \operatorname{sen} t$. c) $x(t) = 1 + 2t + t^2/2 + t^3/3$. d) $x(t) = 2t - t^2$. e) $x(t) \equiv 1$. **21.16.** a) Existe la solución exacta $x(t) = t$. b) Existe la solución exacta $x(t) = e^t$. c) Existe la solución exacta $x(t) \equiv 1$. d) Existe la solución exacta $x(t) = e^{-t}$.

§ 22.

21.3. $(Ax, y) - (x, Ay) = i\int_0^1 (x'\bar{y} + x\bar{y}')\,dt = i[x\bar{y}]_0^1 = 0.$

Sea que $(ix', y) = (x, y^*)$ e y^{**} es la integral indefinida de y^*; entonces

$$i\int_0^1 x'(\bar{y} + i\bar{y}^{**})\,dt = 0,$$

de donde $h = y + iy^{**}$ es constante en casi todos los puntos de $[0, 1]$; cambiando sus valores en el conjunto de medida nula obtenemos $y + iy^{**} = c$, de donde $y' + iy^* = 0$, en casi todos los puntos. Por eso, el campo de definición de A^* se compone de todas las funciones absolutamente continuas $y(t)$, cuyas derivadas se encuentran en $L_2[0, 1]$ sin ninguna restricción respecto a los valores fronteras. **22.5.** En general, no es cierto, porque es posible que $D(A^*) = 0$. **22.6.** Sea que $y \in D(A^*)$ y $A^*y = y^*$. Como $R(A) = H$, existe un $h \in D(A)$ tal, que $Ah = y^*$, por eso, para cualquier $x \in D(A)$ será $(Ax, y) = (x, y^*) = (x, Ah) = (Ax, h)$. De aquí, $y = h \in D(A)$. **22.8.** Si $Au = 0$, entonces $(u, Av) = (Au, v) = 0$ para cualquier $v \in D(A)$, por eso u es ortogonal a $R(A)$ y, por lo tanto, $u = 0$ y el operador A^{-1} existe. A continuación se establece que existe el operador $(A^*)^{-1}$ y que $(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$, de donde se desprende que el operador A^{-1} es simétrico. **22.9.** Es necesario comprobar solamente la densidad de $R(A)$. En caso contrario existe un $h \in H$, $h \neq 0$ tal, que $h \perp R(A)$. Entonces $(f, Ah) = (Af, h) = 0$ para cualquier $f \in H$, de donde $Ah = 0$, lo que contradice a la existencia del operador inverso. **22.11.** a) $\Rightarrow$ b) $A = A^*$ y como A^* es cerrado, A también lo es. Si existe un $x \in D(A^*) = D(A)$ tal, que $A^*x = ix$, entonces, $Ax = ix$ e $-i(x, x) = (ix, x) = (Ax, x) = (x, Ax) = i(x, x)$ de donde $x = 0$. Por lo tanto, $N(A - iI) = 0$. De modo análogo se establece que $N(A + iI) = 0$. b) $\Rightarrow$ c) Si $R(A - iI)$ no es denso en H, para $y \in [R(A - iI)]^{\perp}$ $(y \neq 0)$ tendríamos que $((A - iI)x, y) = 0$ para cualquier $x \in D(A)$. Entonces $y \in D(A^*)$ y $(A - iI)^* y = (A^* + iI)y = 0$, lo que es imposible, porque $N(A^* + iI) = 0$. Queda por demostrar el carácter cerrado de $R(A - iI)$. Si $x \in D(A)$, se tiene $\|(A - iI)x\|^2 = \|Ax\|^2 + \|x\|^2$; igualmente, si $x_n \in D(A)$ y $(A - iI)x_n \to y_0$, tiene lugar $x_n \to x_0$ y Ax_n también converge. Como A es cerrado, en-

tonces $x_0 \in D(A)$ y $(A - iI)x_0 = y_0$. Así, $R(A - iI)$ es cerrado y coincide con H. Se estableció de modo análogo que $R(A + iI) = H$. c) $\Rightarrow$ a) Sea $x \in D(A^*)$. Como $R(A - iI) = H$, existe un $y \in D(A)$ tal, que $(A - iI)y = (A^* - iI)x$. Pero $D(A) \subset D(A^*)$ y por eso $x - y \in D(A^*)$ y $(A^* - iI)(x - y) = 0$. Como $R(A + iI) = H$, $N(A^* - iI) = 0$ y, por lo tanto, $x = y \in D(A)$ y $D(A^*) = D(A)$.

22.13. a)

a) $G(s, t) = \begin{cases} s(1-t) & \text{para } 0 \leqslant s \leqslant t \leqslant 1, \\ t(1-s) & \text{para } 0 \leqslant t \leqslant s \leqslant 1. \end{cases}$

b) $G(s, t) = \frac{1}{3} \begin{cases} (s+1)(2-t) & \text{para } 0 \leqslant s \leqslant t \leqslant 1, \\ (t+1)(2-s) & \text{para } 0 \leqslant t \leqslant s \leqslant 1. \end{cases}$

c) $G(s, t) = \begin{cases} \operatorname{sen} s \cos t & \text{para } 0 \leqslant s \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{2}, \\ \operatorname{sen} t \cos s & \text{para } 0 \leqslant t \leqslant s \leqslant \frac{\pi}{2}. \end{cases}$

d) $G(s, t) = \frac{1}{\operatorname{sh} 1} \begin{cases} \operatorname{sh} s \operatorname{sh}(1-t) & \text{para } 0 \leqslant s \leqslant t \leqslant 1, \\ \operatorname{sh} t \operatorname{sh}(1-s) & \text{para } 0 \leqslant t \leqslant s \leqslant 1. \end{cases}$

e) Para $|\gamma| \neq 1$

$$G(s, t) = \frac{1}{2} \begin{cases} e^{s-t} - \frac{1-\gamma}{1+\gamma} e^{s+t-2} & \text{para } 0 \leqslant s \leqslant t \leqslant 1. \\ e^{t-s} - \frac{1-\gamma}{1+\gamma} e^{s+t-2} & \text{para } 0 \leqslant t \leqslant s \leqslant 1. \end{cases}$$

Para $\gamma = -1$ $G(s, t)$ no existe, para $\gamma = 1$ $G(s, t) = \frac{1}{2} e^{-|s-t|}$.

22.14. a) $x(s) = \lambda \int_0^1 G(s, t) x(t)\, dt$, donde

$$G(s, t) = -\begin{cases} \operatorname{arc\,tg} s & \text{para } 0 \leqslant s \leqslant t \leqslant 1. \\ \operatorname{arc\,tg} t & \text{para } 0 \leqslant t \leqslant s \leqslant 1. \end{cases}$$

b) $x(s) = \lambda \int_0^1 G(s, t) x(t)\, dt + \int_0^1 G(s, t) f(t)\, dt$, donde

$$G(s, t) = -\frac{1}{3} \begin{cases} (s+2)(1-t) & \text{para } 0 \leqslant s \leqslant t \leqslant 1, \\ (t+2)(1-s) & \text{para } 0 \leqslant t \leqslant s \leqslant 1. \end{cases}$$

c) Con las condiciones de frontera dadas la función de Green no existe.

22.15. a) Emplear la igualdad

$$(Ux, x) = \int_a^b (px'^2 + qx^2)\, dt + \frac{\alpha_1}{\alpha_2} p(a) x^2(a) + \frac{\beta_1}{\beta_2} p(b) x^2(b).$$

b) Emplear los teoremas 22.2 y 20.1—20.3. Los valores propios del operador U son inversos a los valores propios del operador integral con el nucleo $G(s, t)$.
c) Si $Ux = \lambda x$ y $\| x \| = 1$, $(Ux, x) = \lambda$.
d) Suponer que existen dos funciones propias con un mismo valor propio y demostrar que el determinante de Wronski del mismo es igual a cero.
e) Comprobar que $D(U)$ es denso en $L_2[a, b]$ y emplear los teoremas 22.2 y 20.3.

22.16. Sean $x(t) \in D(U)$, $\varphi_k(t)$ un sistema ortonormalizado, denso en el espacio $L_2[a, b]$, en virtud del problema 22.15 d), de las funciones propias del operador U que corresponden a los valores propios λ_k, $0 \leqslant \lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \ldots$ Entonces $x = \sum_{k=1}^{\infty} (x, \varphi_k)\varphi_k$ y $(Ux, x) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k |(x, \varphi_k)|^2 \geqslant \lambda_1 \sum_{k=1}^{\infty} |(x, \varphi_k)|^2 = \lambda_1 \| x \|^2 = \lambda_1$. Por otro lado, $\varphi_1(t) \in D(U)$ y $(U\varphi_1, \varphi_1) = \lambda_1 \| \varphi_1 \|^2 = \lambda_1$.
22.17. $x_0(t) = \sqrt{2} \operatorname{sen} \pi t$.
22.18. a) $(Ux, x) = \int_a^b x'^2\, dt$. Si $(Ux, x) = 0$, $x(t) = \text{const}$ y en virtud de las condiciones de frontera $x(t) \equiv 0$.
b) En la representación correcta para $x(t) \in D(U)$,

$$x(t) = \int_a^t x'(\tau)\, d\tau$$

empleemos la desigualdad de Cauchy—Buniakovski, luego elevemos al cuadrado ambos miembros e integremos sobre $[a, b]$. Obtenemos como resultado que, para $x \in D(U)$,

$$\int_a^b x'^2\, dt \geqslant \frac{1}{(b-a)^2} \int_a^b x^2(t)\, dt$$

o $(Ux, x) \geqslant \gamma^2 \| x \|^2$.
22.20. Tomar $f \in L_2[a, b]$ y discontinua. 22.21. Sea que $Ax_0 = f$ e $y \in D(A)$ es arbitrario. Tomemos $y = x_0 + z$, entonces $F(y) = F(x_0) + (Az, z) \geqslant F(x_0)$. 22.22. Sea que el mínimo de $F(x)$ se realiza sobre el elemento $x_0 \in D(A)$ e $y \in D(A)$ es arbitrario. Entonces para cualquier $\lambda \in \mathbf{R}$ se tendrá $F(x_0 + \lambda y) \geqslant F(x_0)$ o $\lambda^2 (Ay, y) + 2\lambda \operatorname{Re} (Ax_0 - f, y) \geqslant 0$, de donde $Re\,(Ax_0 - f, y) = 0$ y, reemplazando aquí y por iy, obtenemos $\operatorname{Im} (Ax_0 - f, y) = 0$. Tenemos en definitiva $(Ax_0 - f, y) = 0$ para cualquier y de la variedad lineal $D(A)$, densa en H. Por eso $Ax_0 = f$. 22.24. En virtud del carácter definido positivo $\| x \|_A^2 = (Ax, x) \geqslant \gamma^2 \| x \|^2$. Si A es un operador acotado, $\| x \|_A^2 = (Ax, x) \leqslant \| A \| \cdot \| x \|^2$. 22.25. Si $y \in H_A$ es un elemento del espacio energético, que se une cuando se realiza la completación,

existe una sucesión $x_n \in D(A)$ tal, que $\| x_n - y \|_A \to 0$. En virtud del problema 22.24. $\| x_n - x_m \| \leqslant \frac{1}{\gamma} \| x_n - x_m \|_A$, la sucesión x_n es fundamental en H. Sea que $x_n \to x$. Pongamos $Jy = x$. Queda por comprobar que x se determina unívocamente respecto a y que la correspondencia J es lineal. Sea, además, $y_1, y_2 \in H_A$, $y_1 \neq y_2$ y $Jy_1 = x$, $Jy_2 = x$. Si $y_1 - y_2 = y$, se tiene $y \in H_A$ y $Jy = 0$. Por eso existe la sucesión $x_n \in D(A)$, tal, que $x_n \to 0$ y $\| y - x_n \|_A \to 0$ cuando $n \to \infty$. Si $z \in D(A)$ es arbitrario, tenemos $[x_n, z]_A = (x_n, Az) \to 0$; por otro lado, $[x_n, z]_A \to [y, z]_A$. De esta manera, $[y, z]_A = 0$, de donde $y = 0$ e $y_1 = y_2$. La desigualdad para las normas, que define el encaje, se determina por medio del paso límite de la desigualdad obtenida en el problema 22.24. 22.26. Sea que $y \in H_U$. Entonces $y \in L_2[a, b]$ y existe un $x_n \in D(U)$ tal, que $\| x_n - y \|_A \to 0$, $\| x_n - y \| \to 0$. La sucesión x_n es fundamental en la norma energética, de donde x_n' es fundamental en la norma $L_2[a, b]$; por lo tanto, existe un $z \in L_2[a, b]$ tal, que $\| x_n' - z \| \to 0$. Ya que en este caso $\| x_n - y \| \to 0$, z es la derivada generalizada de y. Empleando la desigualdad de Cauchy—Buniakovski comprobemos que cuando $n \to \infty$

$$x_n(t) = \int_a^t x_n'(\tau)\, d\tau \to \int_a^t z(\tau)\, d\tau$$

uniformemente sobre $[a, b]$. Por medio del paso al límite, de aquí se obtiene $y(a) = 0$. De modo análogo se determina que $y(b) = 0$. 22.27. Como $(Ax, x) = \| x \|_A^2$, $F(x) = \| x \|_A^2 - 2\,\mathrm{Re}\,(x, f)$ tiene sentido para cualquier $x \in H_A \subset H$. 22.28. Puesto que para $x \in H_A \subset H$ se tiene $| (x, f) | \leqslant \| x \| \| f \| \leqslant \frac{\| f \|}{\gamma} \| x \|_A$, en virtud del teorema 12.2, $(x, f) = [x, x_0]_A$, de donde $F(x) = (Ax, x) - (x, f) - (f, x) = [x, x]_A - [x, x_0]_A - [x_0, x]_A = \| x - x_0 \|_A^2 - \| x_0 \|_A^2$. Por eso el mínimo de $F(x)$ equivale a $- \| x_0 \|_A^2$ y se alcanza sobre el elemento $x_0 \in H_A$.

Capítulo 6

§ 23.

23.5. Es corolario del carácter acotado de un conjunto compacto. 23.6. La continuidad de F se desprende de la continuidad de la función $K(t, s, x)$ respecto a x y de la posibilidad del paso límite bajo el signo de integral en condiciones de una convergencia uniforme, la continuidad completa se desprende del teorema 15.3. 23.7. En general, no. 23.12. $F(x) - F(x_0) = F'(x_0)(x - x_0) + \omega(x - x_0)$ $(x \in S)$, donde $\| \omega(h) \| = o(\| h \|)$ cuando $h \to 0$ a consecuencia de la diferenciabilidad de F. Luego, $G(z) - G(z_0) = G'(z_0)(z - z_0) + \delta(z - z_0)$ $(z \in \sum)$, donde $\| \delta(g) \| = o(\| g \|)$ cuando $g \to 0$, de-

bido a la diferenciabilidad de G. Pero entonces, en un entorno del punto z_0

$$(F * G)(z) - (F * G)(z_0) = F(G(z)) - F(G(z_0)) = F'(x_0)(G(z) - G(z_0)) + \omega(G(z) - G(z_0)) = F'(x_0) G'(z_0) + \rho(z - z_0),$$

donde $\rho(z - z_0) = F'(x_0)\,\delta(z - z_0) + \omega(G(z) - G(z_0))$ y $\|\rho(g)\| = o(\|g\|)$ cuando $g \to 0$. 23.13. $F'(x_0)\,h = 2(x_0, h)$, $G'(x_1)\,h = \dfrac{(x_1, h)}{(x_1, x_1)} =$

$= \left(\dfrac{x_1}{\|x_1\|^2}, h\right)$ para $x_1 \neq 0$.

23.18. a) $F'(1, 1, 1) = \|1\ 2\ 3\|$; b) $F'(1) = \begin{Vmatrix} -\pi \\ 0 \\ 1 \end{Vmatrix}$;

c) $F'(1, 1) = -\begin{Vmatrix} 0 & -\pi e \\ e & 0 \\ 1 & 0 \end{Vmatrix}$; d) $F'(1, 1, 1) =$

$$= \begin{Vmatrix} -1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{3} \\ 1 & 1 & 1 \end{Vmatrix}.$$

23.19. $(F*G)'(t_0) = \left\| \dfrac{\partial F_i(x_0)}{\partial x_j} \right\|_{\substack{i=1, 1, \ldots, n \\ j=1, 2, \ldots, k}} \left\| \dfrac{\partial G_r(t_0)}{\partial z_s} \right\|_{\substack{r=1, 2, \ldots, k \\ s=1, 2, \ldots, m}}$

23.21. a) $F'(u_0) = \cos \operatorname{sen} x$; b) $F'(u_0) = \operatorname{sen} \cos x$; c) $F'(0) = 1 - x$; d) $F'(0) = 1 + x^2$.

23.22.

$$F(u) - F(u_0) = h(x) - \int_a^b [f(x, s, u_0(s) + h(s)) - f(x, s, u_0(s))]\, ds,$$

23.23. $F'(0)\,h = h(x) + \lambda \int_0^\pi \operatorname{sen} x h(s)\, ds$. Integrando la ecuación

$$h(x) + \lambda \operatorname{sen} x \int_0^\pi h(s)\, ds = \cos x$$

de cero a π, obtenemos

$$\alpha - 2\lambda\alpha = 0, \quad \alpha = \int_0^\pi h(s)\, ds.$$

Para $\lambda \neq -1/2$ $\alpha = 0$ y $h(x) = \cos x$. Para $\lambda = -1/2$ $h(x) = \cos x + C \operatorname{sen} x$, donde C es una constante arbitraria. 23.24. Según el problema 23.12, $\dfrac{d}{d\theta}[F(x_1 + \theta(x_2 - x_1)] = F'[x_1 + \theta(x_2 -$

$-x_1)](x_2-x_1)$. Integrando esta identidad sobre $[0, 1]$, obtenemos la fórmula de Lagrange. **23.28.** Utilizando, en primer lugar, la fórmula de Lagrange para F, y luego, la condición de Lipschitz para F', obtenemos

$$\| F(x_1)-F(x_2)-F'(x_2)(x_1-x_2)\| \leqslant$$

$$\leqslant \left\| \int_0^1 [F'(x_2+\theta(x_1-x_2))-F'(x_2)]\,d\theta \right\| \cdot \| x_1-x_2\| \leqslant$$

$$\leqslant \int_0^1 \| F'(x_2+\theta(x_1-x_2))-F'(x_2)\|\,d\theta\, \| x_1-x_2\| \leqslant$$

$$\leqslant \int_0^1 l\theta\,d\theta\, \| x_1-x_2\|^2 = \frac{1}{2} l \| x_1-x_2\|^2.$$

23.30. Sea que $x=\{x_k\}_{k=1}^{\infty} \subset m$, $\| x\| \leqslant c$ y $M=\sup\limits_n |f_n(\xi)|$; entonces $|f_n(x_n)| \leqslant M$ $(n \in \mathbf{N})$ y, por lo tanto, $F(x) \in m$. Según la fórmula de Taylor, para $x^0=\{x_k^0\}_{k=1}^{\infty} \in m$

$$f_n(x_n)-f_n(x_n^0)-f_n'(x_n^0)(x_n-x_n^0)=$$

$$=\int_0^1 [f_n'(x_n^0+\theta(x_n-x_n^0))-f_n'(x_n^0)]\,d\theta\,(x_n-x_n^0).$$

Debido al carácter equicontinuo de f_n', el segundo miembro de la última igualdad es $o(|x_n-x_n^0|)$ cuando $x_n \to x_n^0$. Por lo tanto,

$$F'(x^0)h=(f_1'(x_1^0)h_1,\quad f_2'(x_2^0)h_2,\ \ldots).$$

23.31.

$$\varphi(x_0)h=\int_a^b \left[\frac{\partial\Phi(t,\ x_0(t),\ x_0'(t)}{\partial x}\,h(t)+\frac{\partial\Phi(t,\ x_0(t),\ x_0'(t))}{\partial x'}\,h'(t)\right]dt.$$

23.36. $[F_2xy](t)=\frac{1}{2}x(t)\int_0^1 K(t,\ s)\,y(s)\,ds+$

$$+\frac{1}{2}y(t)\int_0^1 K(t,\ s)\,x(s)\,ds;$$

$$\left[\frac{d}{dx}F_2x^2\right]h=2F_2xh;\quad \left[\frac{d^2}{dx^2}F_2x^2\right]h^2=2F_2h^2.$$

23.38. a) $dF(x_0, h) = h'' + h\cos t$. $d^k F(x_0, h) = \operatorname{sen}(t + k\pi/2)\, h^k$, $k \geqslant 2$. b) $F(x_0 + h) = \operatorname{sen} t + h' + h\cos t + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(t + k\pi/2)}{k!} h^k$.

23.39. Repetir los razonamientos de la demostración del teorema de Abel. 23.42. $\Omega = \{(x_1, x_2) \in \mathbf{R};\ |x_1 x_2| < 1)\}$. $\rho_u = 1$.

23.44. $F(x_0 + h) = F(x_0) + h(t) + \int_a^b K(t, s)\, e^{x_0(s)} h^k(s)\, ds +$

$$+ \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k!} \int_a^b K(t, s)\, e^{x_0(s)} h^k(s)\, ds.$$

23.46. Para $x(t) \in C_\alpha$ $\sup_{[0, +\infty)} |tx(t)| \leqslant \sup_{[0, +\infty]} |te^{-\alpha t}| \, \| x \|_\alpha = (\alpha e)^{-1} \| x \|_\alpha < 1$ para $\| x \|_\alpha < \alpha e$. Por lo tanto,

$$\| F(x) \|_\alpha \leqslant \frac{\| x \|_\alpha}{1 - (\alpha e)^{-1} \| x \|_\alpha}.$$

§ 24.

24.3. a) Emplear el teorema de Lagrange y el teorema 24.1. b) Utilizando el teorema de Lagrange demostrar que para $f(x)$ existe la función inversa. Luego emplear el teorema 24.1. 24.4. $t = 0{,}35$. 24.7. $t = -0{,}75$. 24.8. c) $E_0 = 0{,}00$, $E_1 = 0{,}92$, $E_2 = 1{,}55$, $E_3 = 2{,}02$, $E_4 = 2{,}42$, $E_5 = 2{,}79$, $E_6 = 3{,}14$, $E_7 = 3{,}49$, $E_8 = 3.86$, $E_9 = 4.26$, $E_{10} = 4{,}73$, $E_{11} = 5.36$, $E_{12} = 6{,}28$, $E_k = E\left(\frac{kT}{12}\right)$ $(k = 0, 1, \ldots$ $\ldots, 12)$. d) $E(T/4) = 1{,}81$ para $e = 0{,}25$, $E(T/4) = 2{,}02$ para $e = 0{,}5$, $E(T/4) = 2{,}18$ para $e = 0{,}75$. 24.9. c) Para $k = 2x_0 = 0{,}00$, $x_1 = 0{,}10$, $x_2 = 0{,}22$, $x_3 = 0{,}35$, $x_4 = 0{,}49$, $x_5 = 0{,}64$, $x_6 = 0{,}81$, $x_7 = 1{,}01$, $x_8 = 1{,}25$, $x_9 = 1{,}54$, $x_{10} = 2{,}00$, $x_m = x(m/10)$, $m = 0, 1, \ldots, 10$. 24.10. Considerar la función $f(x) = x - \frac{1}{2}(x^2 - a)$ y comprobar que esta es la aplicación contraída en sí del $[a/2, 1]$. 24.11. El límite es igual a $1 + \sqrt{2}$. Considerar la función $f(x) = 2 + 1/x$ y comprobar que ésta es la aplicación contraída en sí del $[2, 3]$. 24.19. Considerar la aplicación $\Phi\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $\Phi(x) = x + \pi/2 - \operatorname{arctg} x$. 24.20. Sea $\varphi\colon Q \to \mathbf{R}$ una función real sobre Q determinada por la igualdad $\psi(x) = \| \Phi(x) - x \|$, $x \in Q$. Como Φ es una aplicación continua, φ es también continua. En virtud de la bicompacidad de Q, la función φ alcanza su valor mínimo $a \geqslant 0$ sobre Q en cierto punto $x_0 \in Q$. Si $a > 0$, $\varphi((\Phi x_0)) = \| \Phi(\Phi(x_0)) - \Phi(x_0) \| < \| \Phi(x_0) - x_0 \| = \varphi(x_0) = a$, lo que contradice a la definición de a. Por eso $a = 0$ y x_0 es un punto fijo de Φ. La aplicación Φ puede no ser contraída (consideremos $\Phi(x) = \operatorname{sen} x$ para $x \in [0, \pi/2]$). 24.23. b) $K_n(s, t) = st/3^{n-1}$, $R(s, t, \lambda) = 3st/(3 - \lambda)$. c) Para $\lambda \neq 3$ la solución tiene la forma $x(s) = f(s) + \frac{3\lambda}{3 - \lambda} \int_0^1 st\, f(t)\, dt$. 24.28. El ope-

rador $\Psi = \Phi^m$ tiene un único punto fijo x^*. Pero Ψ y Φ son permutables sobre Q y por eso $\Phi(x^*)$ es también punto fijo de Ψ, o sea, $\Phi(x^*) = x^*$. Si $\overline{x}$ es otro punto fijo de Φ, se tiene $\Psi(\overline{x}) = \Phi^m(\overline{x}) = \overline{x}$, es decir, $\overline{x} = x^*$.

24.31. Según la fórmula de Taylor,

$$f(x^*) = f(x_n) + f'(x_n)(x^* - x_n) + \frac{1}{2} f''(\xi_n)(x^* - x_n)^2.$$

De aquí $0 \leqslant x_{n+1} - x^* \leqslant \frac{l}{2m}(x_n - x^*)^2$. Además, $f(x^*) = f(x_0) + f'(\eta)(x^* - x_0)$ y, por lo tanto, $0 < x_0 - x^* \leqslant |f(x_0)|/m$. De aquí, mediante la inducción se establece la estimación requerida. 24.33. Si $x = (x_1, x_2, \ldots) \in l_2$ es punto fijo para F, se tiene $\|x\| = 1$, debido a que $\|F(x)\| = 1$ para todos los $x \in l_2$. De la condición $x = F(x)$ se desprende que $x_1 = x_2 = \ldots = 0$, lo que es una contradicción. 24.34. b) La continuidad del operador F se desprende de la continuidad de la función $f(t, x)$ y de la posibilidad del paso al límite bajo el signo de integral en las condiciones de la convergencia uniforme; la continuidad completa se deduce de las estimaciones $|F(x)| \leqslant |x_0| + b|h|$, $|F(x)(t_1) - F(x)(t_2)| \leqslant b|t_1 - t_2|$ y del teorema 15.3. c) Emplear el teorema 24.4. d) $f(t, x) = \sqrt[3]{x}$ ($t_0 = 0$, $x_0 = 0$). 24.35. a) Sea $x(t)$ solución del problema de contorno. Entonces, de la ecuación diferencial determinamos

$$x''(t) = K \exp\left\{-\int_0^t x(s)\,ds\right\},$$

por lo tanto,

$$x(t) = Lt + M + K\int_0^t \int_0^\pi \exp\left\{-\int_0^\sigma x(s)\,ds\right\} d\sigma\, d\tau,$$

donde las constante K, L, M, se determinan de las condiciones de frontera, lo que lleva a la ecuación integral. Recíprocamente, si $x(t) \in C[0, 1]$ es la solución de la ecuación integral, ésta satisface las condiciones de frontera y la ecuación diferencial. b) Sea que $|x(t)| \leqslant r = |a| + |b| + |c - a - b|$. Entonces $|\Phi(x)| \leqslant |a| + |b| + |c - a - b| = r$. c) Del párrafo b) se deduce que el conjunto de funciones $y(t) = \{\Phi(x)\}(t)$ es acotado. A continuación se verifica que

$$|y(t_2) - y(t_1)| \leqslant [|b| + 2e^{2r}|c - a - b|] \cdot |t_2 - t_1|,$$

de donde sigue la equicontinuidad de las funciones de este conjunto. 24.36. La condición

$$\|K\| \cdot n \cdot \left(\|y\| \frac{n}{n-1}\right)^{n-1} < 1$$

satisface la existencia de justamente dos soluciones positivas

$$r_* < \frac{1}{(n \cdot \|K\|)^{1/(n-1)}} < r^*$$

de la ecuación $\| K \| r^n + \| y \| = r$. El operador Φ aplica en sí la bola $\| x \| \leqslant r_*$ al igual que la bola $\| x \| \leqslant r^*$. En la primera bola, Φ es contracción, ya que en el $\| \Phi(x') - \Phi(x'') \| \leqslant \| K \| \cdot n \cdot r_*^{n-1} \times \| x' - x'' \|$ y $\| K \| \cdot n \cdot r^{n-1} < 1$. En la segunda bola, Φ es totalmente continuo como el producto de un operador integral lineal totalmente continuo y un operador no lineal acotado (véase el problema 23.4).

§ 25.

25.7. Señalemos que $x(t) = A \operatorname{sen} t$, por eso A satisface la ecuación $A = \frac{\lambda}{\pi}\left[A\frac{\pi}{2} + A^3\frac{\pi}{2}\right]$, la raíz $A = 0$ no sirve y, por lo tanto, $A = \frac{2-\lambda}{\lambda}$, $x(t) = \frac{2-\lambda}{\lambda} \operatorname{sen} t$ ($\lambda \neq 0$). 25.8. Aparte de la solución hallada en el problema 25.7, la ecuación integral tiene la solución $x(t) \equiv 0$ para cualesquiera λ. 25.10. Buscamos la solución en la forma $x(t) = x_0(t) + \varepsilon x_1(t) + O(\varepsilon^2)$ (cuando $\varepsilon \to 0$). Para $x_0(t)$ y $x_1(t)$ tenemos los problemas

$$x_0'' + \operatorname{sen} x_0 = 0, \qquad x_0(0) = x_0(1) = 0,$$
$$x_1'' + x_1 \cos x_0 = \operatorname{sen} \pi t, \quad x_1(0) = x_1(1) = 0.$$

De aquí $x_0(t) \equiv 0$, $x_1(t) = -\frac{1}{\pi^2 - 1} \operatorname{sen} \pi t$.

25.11. a) El corolario del teorema 25.2.

b) $\frac{\partial x}{\partial \varepsilon} = [1 - \varepsilon\varphi'(x)]^{-1} \varphi(x)$, $\frac{\partial x}{\partial a} = (1 - \varepsilon\varphi'(x))^{-1}$,

de donde $\frac{\partial x}{\partial \varepsilon} = \varphi(x) \frac{\partial x}{\partial a}$. Luego, por inducción se obtienen las igualdades requeridas. c) El corolario de la fórmula de Taylor. 25.14. Consideremos la ecuación auxiliar $x = a + \varepsilon/\psi(x)$. Conforme al problema 25.11 c) su solución se da por la serie

$$x(a, \varepsilon) = a + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varepsilon^k}{k!} \frac{d^{k-1}}{da^{k-1}} \left[\frac{1}{\psi(a)}\right].$$

Para $a = 0$ obtenemos la solución buscada

$$x(\varepsilon) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varepsilon^k}{k!} \frac{d^{k-1}}{dx^{k-1}} \left[\frac{1}{\psi(x)}\right]\Bigg|_{x=0}.$$

25.15. Para $\lambda \in [a, b]$ el operador $\Phi(x) = x - \frac{2}{m+M} F(x, \lambda)$ es una aplicación contraída, con el coeficiente de contracción $\frac{M-m}{M+m}$, en el espacio $C(-\infty, \infty)$.

§ 26.

26.2. $\overline{x}_n \xrightarrow{T} x = (\xi_k)_{k=1}^{\infty}$ ξ_i es arbitrario. 26.3. Sea que las normas del $\overline{X}_n$ son regulares. Supongamos que la sucesión $\overline{x}_n \xrightarrow{T} x'$ y $\overline{x}_n \xrightarrow{T} x''$. Entonces

$$\| T_n(x'-x'') \|_{\overline{X}_n} \leqslant \| T_n x' - \overline{x}_n \|_{\overline{X}_n} + \| \overline{x}_n - T_n x'' \|_{\overline{X}_n} \to 0, \quad n \to \infty.$$

Pero entonces $x'-x''=0$. Al contrario, si $\| T_n x \|_{\overline{X}_n} \to 0$ para cierto $x \neq 0$, se tiene $\overline{x}_n = T_n x \xrightarrow{T} x$ y $\overline{x}_n \xrightarrow{T} 0$ $(n \to \infty)$. 26.4. Emplear el resultado del problema anterior. 26.5. La demostración repite literalmente la demostración del teorema 8.2. 26.6. El conjunto de los nodos de la red es denso sobre $[0, l]$ y por eso existe una sucesión $(t_{k_s}^{(n_s)})_{s=1}^{\infty}$ de nodos convergente hacia t_0, en la cual $|x(t_0)| = \| x \|_{C[0,l]}$ 26.7. Basta señalar que $\| x_n \|_{esf}^2$ es la suma integral de Riemann para la función continua $x^2(t)$. 26.9. Emplear el problema anterior. 26.11. a) Sí, con el primer grado si $x'(t)$ es acotada sobre $[0, l]$. b) sí, con el tercer grado, si $x'(t)$ es integrable sobre $[0, l]$. 26.13. Se desprende de la desigualdad

$$\| \overline{A}_n T_n x - \overline{y}_n \|_{Y_n} \leqslant \| \overline{A}_n T_n x - T_n' A x \|_{\overline{Y}_n} + \| T_n' y - \overline{y}_n \|_{\overline{Y}_n}.$$

26.15.

$$\| \overline{A}_n T_n x - T_n A x \|_{\overline{Y}_n} = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} \left| x'\left(\frac{i}{n}\right) - n\left[x\left(\frac{i}{n}\right) - x\left(\frac{i-1}{n}\right)\right] \right| \leqslant$$

$$\leqslant \max_{1 \leqslant i \leqslant n} \int_0^1 \left| x'\left(\frac{i}{n}\right) - x'\left(\frac{i-1}{n} + \theta \frac{1}{n}\right) \right| d\theta \to 0, \quad n \to \infty,$$

a consecuencia de la continuidad uniforme de $x'(t)$ sobre $[0, l]$. 26.16. Según la fórmula de Lagrange,

$$\| \overline{A}_n T_n x - T_n A x \|_{\overline{Y}_n} \leqslant \sup_{[0,\, l]} |x''(t)| \cdot \frac{1}{2n}.$$

26.18. $\| \overline{x}_n \| = \| \overline{A}_n^{-1} A_n \overline{x}_n \| \leqslant \gamma^{-1} \| \overline{A}_n \overline{x}_n \|$. Véase también el problema 17.20. 26.19. Se desprende de la desigualdad $(\overline{x}_n, \overline{A}\overline{x}_n) \leqslant \| \overline{x}_n \| \, \| \overline{A}_n \overline{x}_n \|$.

26.21. Escojamos bases en $\overline{X}_n$ e $\overline{Y}_n$; entonces el determinante de la matriz del operador es diferente de cero. 26.27. Se deduce de la desigualdad del problema 26.25 y de la transformación $\| \overline{x}_n - T_n x \| \leqslant \gamma^{-1} \| \overline{A}_n \overline{x}_n - \overline{A}_n T_n x \| = \gamma^{-1} \| \overline{y}_n - T_n' y + T_n' A x - \overline{A}_n T_n x \| \leqslant \gamma^{-1} \| \overline{y}_n - T_n' y \| + \gamma^{-1} \| T_n' A x - \overline{A}_n T_n x \|$. 26.28. a) $R_i(\tau) = 1 - \tau Q_i$. b) Las ecuaciones del sistema se resuelven sucesiva-

mente, de donde se desprende que este sistema tiene solución única. c) Emplear el método de inducción matemática. d) Véase el problema 26.22. 26.30. Considerar la diferencia

$$\frac{x(t)-x(t-\tau)}{\tau}+[\alpha_1 a(t-\tau)+\alpha_2 a(t)]\times$$

$$\times[\beta_1 x(t-\tau)+\beta_2 x(t)]-[\gamma_1 f(t-\tau)-\gamma_2 f(t)$$

aplicarle la fórmula de Taylor que contiene términos hasta el segundo orden de pequeñez. Para $\alpha_1=\alpha_2=\beta_1=\beta_2=\gamma_1=\gamma_2=1/2$ tenemos el segundo grado de exactitud. 26.31. a) Resolver la i-ésima ecuación respecto a x_i. 26.35. En la solución exacta $x(t)\equiv 1$ las ecuaciones de diferencias se satisfacen exactamente igual que la primera condición inicial. La segunda condición inicial se verifica con una exactitud τ^2. 26.36. Las soluciones particulares de este esquema de diferencias pueden determinarse en la forma $x_i=\lambda^i$, de donde $\lambda_1=1$, $\lambda_2=2$. La solución general del sistema sin condiciones iniciales, tiene la forma $x_i=c_1+c_2 2^i$. Utilizando los valores iniciales para $i=0$ e $i=1$, hallamos la solución del esquema de diferencias. 26.37. Véase la solución del problema. 26.35. 26.38. Indiquemos que $x_i=1-\tau^2+\tau^2(c/a)^i$ $(i=0,\ 1,\ \ldots,\ n)$. Si $|c/a|<1$, entonces, $\|\overline{x}_n-T_n 1\|_{\overline{X}_n}\to 0$ $(n\to\infty)$. Si $|c/a|>1$, $\|\widetilde{x}_n-T_n 1\|_{\widetilde{X}_n}\to\infty$ $(n\to\infty)$. 26.39. a) Emplear la fórmula de Taylor para la función vectorial $x(t)$. b) Estimar previamente la norma de la matriz $R_i(\tau)$. 26.40. b) Aplicar a la función

$$(1+\lambda\tau)^{\frac{t}{\tau}}=e^{\frac{t}{\tau}\ln(1+\lambda\tau)}$$

la fórmula de Taylor respecto a τ, la que contiene términos del primer orden respecto a τ y el término residual en la forma integral. Luego estimar este término residual.

§ 27.

27.1. El punto $z=0$ es punto de mínimo de la función $\varphi(t)=\|As+tAz\|^2$ para cualquier $z\in X$ con $Ts=0$. Según el teorema de Fermat, $\varphi'(0)=2(As,\ Az)=0$. 27.2. En virtud de la condición de ortogonalidad $\|A(s+z)\|^2=\|As\|^2+\|Az\|^2\geqslant\|As\|^2$. 27.3. Verifiquemos la condición de ortogonalidad. Para cualquier $z(t)\in H^1[0,\ l]$ tal, que $z(t_i)=0$ $(i=0,\ 1,\ \ldots,\ n)$ tenemos

$$(As_1,\ Az)=\int_0^l s_1' z'\,dt=\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i-x_{i-1}}{t_i-t_{i-1}}\int_{t_{i-1}}^{t_i} z'(t)\,dt=0.$$

27.5. Como $\widetilde{s}-s\in N(T)$, se tiene $(A(\widetilde{s}-s),\ As)=0$, o sea, $\|As\|^2=(A\widetilde{s},\ As)$. Permutando $\widetilde{s}$ y s, obtenemos la afirmación buscada. Conforme al problema 3.19 $A(\widetilde{s}-s)=0$. 27.6. En virtud del problema anterior $\widetilde{s}-s\in N(A)$. Además, $T(\widetilde{s}-s)=T\widetilde{s}-Ts=\overline{x}-\overline{\overline{x}}=$

$= 0$, es decir, $\widetilde{s} - s \in N(T)$. Pero entonces $\widetilde{s} - s \in \{0\}$, o sea, $\widetilde{s} - s = 0$. 27.7. Demostremos que aquí $N(A) \cap N(T) = \{0\}$. $N(A)$ se compone de polinomios de grado primero (o nulo) del tipo $C_1 t + C_2$. Si $T\{C_1 t + C_2\} = 0$, entonces $C_1 = C_2 = 0$ cuando $n \geqslant 1$, ya que un polinomio de primer grado no tiene más de un cero. 27.8. b) $T\omega_l = \overline{x^l}$, en adelante para cualquier $z \in H^1[0, l]$ con $Tz = 0$ se cumple la condición de ortogonalidad (véase los problemas 27.3 y 27.2). 27.12. Véase la sugerencia al problema 27.7. 27.13. Baste señalar que $AT^{-1}(\overline{x}) = Ax_0 + AN(T)$, donde $x_0 \in X$ es tal, que $Tx_0 = \overline{x}$. 27.14. La variedad afín $AT^{-1}(x)$ es un conjunto convexo cerrado. Le pertenece el elemento y que realiza a distancia desde 0 hasta $AT^{-1}(x)$. Por lo tanto, existe un s tal, $As = y$, $Ts = \overline{x}$. 27.15. Sea que $y_m(t) \in AN(T)$ $(m \in \mathbb{N})$ e $y_m(t) \to y_0 t)$ $(m \to \infty$ en $L_2[0, l]$. Existe un $x_m(t) \in N(T)$ tal, que $x_m^2(t) = y_m(t)$. De aquí

$$x_m(t) = \int_0^t (t-s)\, y_m(s)\, ds - \frac{t}{l} \int_0^l (l-s)\, y_m(s)\, ds$$

(en particular, de $x_m \in N(t)$ se deduce que $x_m(0) = x_m(l) = 0$). Cuando $m \to \infty$, $x_m(t) \to x_0(t) \in N(T)$, es decir, $y_0 \in AN(T)$. 27.16. Integrar dos veces $s_3''(t)$ y determinar las constantes arbitrarias partiendo de la exigencia $s_3(t_i) = x_i$, $s_3(t_{i+1}) = x_{i+1}$. 27.17. c) Escribamos el sistema en la forma $K\beta = f$ con la matriz simétrica K. Tenemos

$$(K\beta, \beta) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\tau_i}{6} (\beta_i + \beta_{i-1})^2,$$

donde $\beta_0 = \beta_n 0$. Si $K\beta = 0$, $\beta = 0$. Por lo tanto, $\det K \neq 0$. 27.18.

$$(As_3, Az) = \int_0^l s_3''(t)\, z''(t)\, dt =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \int_{t_{i-1}}^{t_i} s_3''(t)\, z''(t)\, dt = \sum_{i=1}^{n} \int_{t_{i-1}}^{t_i} s_3''(t)\, dz'(t) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} s_3''(t)\, z'(t) \Big|_{t_{i-1}}^{t_i} - \sum_{i=1}^{n} \int_{t_{i-1}}^{t_i} z'(t)\, ds_3''(t).$$

Pero s_3''' (constante) es la tercera derivada de $s_3(t)$ respecto a $[t_{i-1}, t_i]$, y $\int_{t_{i-1}}^{t_i} z'(t)\, dt = z(t_i) - z(t_{i-1}) = 0$, ya que $Tz = 0$. Por eso, $(As_3, Az) = s_3''(l)\, z'(l) - s_3''(0)\, z(0) = 0$ debido a 4).

§ 28.

28.2 Emplear las estimaciones $\| x_n - P_n x \| \leqslant \| x_n - x \| + \| x - P_n x \|$, $\| x_n - x \| \leqslant \| x_n - P_n x \| + \| P_n x - x \|$. 28.3. Utilizar el problema anterior. 28.5. Emplear la estimación $\| Q_n A P_n x - Q_n A x \| \leqslant \omega_n \| A \| \| P_n x - x \|$. 28.6. Cerciorarse de que

$$Q_n A x = \sum_{i=1}^{n} (Ax, \psi_i) A\varphi_i = A P_n x = Q_n A P_n x.$$

28.9. $\gamma(x_n, x_n) \leqslant (Ax_n, x_n) = (Ax_n, P_n x_n) = (P_n A x_n, x_n) \leqslant \| P_n A x_n \| \cdot \| x_n \|$, de donde $\| P_n A x_n \| \geqslant \gamma \| x_n \|$. 28.10. Conforme al problema 28.6, $\| Q_n A x_n \| = \| A P_n x_n \| = \| A x_n \| \geqslant \gamma \| x_n \|$. 28.11. Utilizando os problemas 28.6 y 28.10 obtenemos

$$\| x_n - x \| \leqslant \| P_n x - x \| \leqslant \gamma^{-1} \| A P_n x - A x \| = \gamma^{-1} \| A P_n x - y \| = \gamma^{-1} \| Q_n y - y \|.$$

28.13. $\varphi(x_n) = \sum_{i,\, j=1}^{n} (A\varphi_i, \varphi_j) c_i c_j - 2 \sum_{i=1}^{n} (A\varphi_i, y) c + (y, y)$. En el punto mínimo $\partial \varphi(x_n)/\partial c_s = 0$ $(s = 1, 2, \ldots, n)$. 28.14. Si A_n es una contracción del operador $Q_n A$ sobre X_n, a consecuencia de la condición de estabilidad se tiene $N(A_n) = \{0\}$, y como un operador que actúa de un espacio n-dimensional en el otro n-dimensional, A_n es continuamente invertible.

28.25. a) $\| x_n \| = \| (Q_n A P_n)^{-1} Q_n A P_n x_n \| \leqslant \gamma \| Q_n A x_n \|$.

b) $\| x_n - x \| = \| (Q_n A P_n)^{-1} Q_n A P_n (x_n - x) \| \leqslant \gamma \| Q_n A (x_n - P_n x) \| = \gamma \| Q_n A x_n - Q_n A P_n x \| \leqslant \gamma\, c \| A \| \cdot \| x_n - P_n x \|$.

28.27. Emplear el problema anterior y el teorema 9.4. 28.28. Se deduce de la identidad $x_n - x = (I - P_n K)^{-1} (P_n x - x)$. 28.29. Se deduce de la identidad $x_n - x = (I - P_n k)^{-1} (P_n y - y) + (I - P_n K)^{-1} (P_n K - K)(I - K)^{-1} y$. 28.30. Aprovechar la identidad

$$1 + 2 \sum_{l=1}^{\infty} \rho^l \cos l\omega = \frac{1 - \rho^2}{1 + \rho^2 - 2\rho \cos \omega}$$

cuando $\rho = s/2$, $\omega = \pi\tau$, de donde

$$K(t, s) = 1 + 2 \sum_{l=1}^{\infty} \left(\frac{s}{2}\right)^l \cos \pi l \tau,$$

$$P_n K(t, s) = 1 + 2 \sum_{l=1}^{n} \left(\frac{s}{2}\right)^l \cos \pi l \tau,$$

$$\| P_n K \|^2 = 2 \sum_{l=n+1}^{\infty} \int_0^1 \left(\frac{s}{2}\right)^{2l} ds \to 0, \quad n \to \infty.$$

28.31. b) Emplear el problema 28.29.

§ 29.

29.6. Utilizar la fórmula de incrementos finitos de Lagrange. 29.7. Emplear el problema anterior. 29.8. Tomando $y = 0$ en la desigualdad $\langle x - y,\ A(x) - A(y)\rangle \geqslant c(\|x - y\|)\|x - y\|$, obtenemos $\langle x, A(x)\rangle \geqslant c(\|x\|)\cdot\|x\| - \langle x, A(0)\rangle \geqslant (c(\|x\|) - \|A(0)\|)\cdot\|x\|$. 29.10. De la condición de coerción se desprende que $\|A(x)\| \geqslant \gamma\|x\|$. 29.16. La existencia y la unicidad de la función implícita $x = \varphi(t)$ se deducen del teorema 29.1. Tomando en la desigualdad dada $x = \varphi(t)$ e $y = \varphi(t_0)$, obtenemos $|\varphi(t) - \varphi(t_0)| \leqslant c^{-1}|f(\varphi(t_0), t)| \to 0$ cuando $t \to t_0$. 29.18. Según la fórmula de incrementos finitos de Lagrange $(x - y)[f(x, t) - f(y, t)] = f_x(\xi, t)(x - y)^2 \geqslant c(x - y)^2$. 29.19. Poniendo en la condición de monotona fuerte $y_1 = x_1$, obtenemos $(x_2 - y_2)[f_2(x_1, x_2) - f_2(x_1, y_2)] \geqslant c(x_2 - y_2)^2$ y se puede emplear el problema 29.16. 29.20. Poniendo en la condición de monotonía fuerte del problema 29.19 $x_2 = \varphi(x_1)$, $y_2 = \varphi(y_1)$, obtenemos

$$(x_1 - y_1)[f_1(x_1, \varphi(x_1)) - f_1(y_1, \varphi(y_1))] \geqslant$$
$$\geqslant c[(x_1 - y_1)^2 + (\varphi(x_1) - \varphi(y_1))^2] \geqslant c(x_1 - y_1)^2.$$

El operador $A_1(x_1)$ es continuo representando la superposición de funciones continuas. 29.21. En virtud del problema 29.15, la ecuación $A_1(x_1) = 0$ tiene la solución única x_1^0; entonces $x^0 = (x_1^0, \varphi(x_1^0))$ es solución única de la ecuación $A(x) = 0$. 29.23. $(A_c(x) - A_c(y), x - y) \geqslant c\|x - y\|^2$. 29.25. a) Corolario del problema 29.22. b) Sea que para cierto n $\|x_n\| > r$; entonces $0 = (x_n, A_n(x_n)) > 0$ es una contradicción. c) Según el teorema de Weierstrass de x_n, siendo esta sucesión acotada en E^k, se puede escoger una subsucesión convergente x_{n_k}. Sea que

$x_{n_k} \to x_0\ (k \to \infty)$. Entonces $0 = A(x_{n_k}) + \frac{1}{n_k}(x_{n_k} \to A(x_0)$ cuando $k \to \infty$, o sea, $A(x_0) = 0$

$$29.26.\ |a(x, z)| \leqslant \max_{0 \leqslant k \leqslant m}\|P_k\|_{C[a, b]}\int_0^l \sum_{k=0}^{m} |\mathcal{D}^k x|\,|\mathcal{D}^k z|\,dt \leqslant$$
$$\leqslant \max_{0 \leqslant k \leqslant m}\|P_k\|_{C[a, b]}\cdot\|x\|_{H^m[0, l]}\cdot\|z\|_{H^m[0, l]}$$

y, además, $a(x, z)$ es lineal respecto a z. 29.28. Emplear la igualdad $\langle Ax - Ay, x - y\rangle = a(x - y, x - y)$. 29.29. Se desprende partiendo de la estimación

$$\left|\int_0^l f(t)z(t)\,dt\right| \leqslant \|f\|_{L_2[0, l]}\cdot\|z\|_{L_2[0, l]} \leqslant \|f\|_{L_2[0, l]}\cdot\|z\|_{H^m[0, l]}.$$

29.30. Emplear el teorema 29.1. 29.31. En virtud del teorema 12.2 existe y es única una función $g(t) \in \overset{\circ}{H}{}^1[0, l]$ tal, que

$$\int_0^l f(t)z(t)\,dt = \int_0^l g'(t)z'(t)\,dt$$

para cualquier $z \in \overset{\circ}{H}{}^1[0, l]$. A esta ecuación le satisface

$$g(t) = \int_0^l G(t, s) f(s)\, ds.$$

29.36. Emplear el teorema 29.1. 29.38. a)

$$a(\omega_0, \omega_0) = n^2 \int_0^h P_0(t)\, dt + \int_0^h P_1(t)(1-nt)^2\, dt,$$

$$a(\omega_n, \omega_{n+1}) = n^2 \int_{1-h}^1 P_0(t)\, dt + \int_{1-h}^1 P_1(t)(nt-n-1)^2\, dt,$$

$$a(\omega_k, \omega_{k+1}) = -n^2 \int_{kh}^{(k+1)h} P_0(t)\, dt + \int_{kh}^{(k+1)h} P_1(t)(nt-k-1)(nt-k)\, dt,$$

$$a(\omega_{k-1}, \omega_k) = -n^2 \int_{(k-1)h}^{(k+1)h} P_0(t)\, dt + \int_{(k-1)h}^{(k+1)h} P_1(t)(nt-k-1)^2\, dt,$$

$$a(\omega_k, \omega_l) = 0 \text{ cuando } l \neq k-1,\ k+1,$$

$$(y, \omega_k) = \int_{(k-1)h}^{(k+1)h} \omega_k(t)\, y(y)\, dt.$$

b) Se obtiene un sistema tridiagonal. c) El operador A es acotado: $\| A \| < K$, en virtud del teorema 29.2 y del problema 27.24.

$$\| x_n - \hat{x} \| \leqslant (cK)^{-1} \| \hat{x}_n - P_n \hat{x}_n \| = O(1/n).$$

Capítulo 8

§ 30.

30.3. Diferenciar respecto a t y multiplicar por x'. 30.4.

a) $x(t) = \dfrac{t+1}{2} e^t$. b) $x(t) = -t^3$. c) $x(t) = e^{t-1}$. d) $x(t) = \ln t$.

e) $x(t) = \sqrt[3]{(t+1)^2}$, en este caso la función $x(t) = \sqrt[3]{(3t-1)^2}$ no se toma por extremal, ya que no tiene derivada finita en el punto $t = 1/3$. f) $x(t) = (C + t)$ sen t, donde C es una constante arbitraria. g) $x(t) = C$ sen $t + \cos t$, C es una constante arbitraria. h) El problema variacional no tiene sentido puesto que la integral no depende del camino de integración. i) $x(t) \equiv 0$ si $x_1 = 0$; cuando

$x_1 \neq 0$, entre las curvas suaves no existen extremales. j) $x(t) = \cos t$. k) No hay extremales. l) $x(t) = 4/t - 1$. m) $x(t) = \sqrt{4 - t^2}$. Emplear el problema 30.3 n) $x(t) = t$. 30.5. a) $x(t) = t^3 - t^2$. b) $x(t) = (1 - t)\,\mathrm{sh}\,t$. c) No hay extremales. d) El problema variacional no tiene sentido, puesto que la integral no depende del camino de integración. e) $x(t) = -(t^2 - c^2)^2$. f) $x(t) = \cos t$. g) $x(t) = \frac{t^3}{6}(t^3 + 6t + 1)$. h) $x(t) = \mathrm{sh}\,t$.

30.6. a) $\begin{cases} x(t) = \operatorname{sen} 2t, \\ y(t) = -\dfrac{t^2}{2} + \dfrac{32 + \pi^2}{8\pi}\,t; \end{cases}$

b) $\begin{cases} x(t) = -\dfrac{1}{6}(t^3 + 5t - 6), \\ y(t) = t; \end{cases}$

c) $\begin{cases} x(t) = \operatorname{sen} t, \\ y(t) = \operatorname{sen} t; \end{cases}$ d) $\begin{cases} x(t) = \dfrac{t^2}{2} + 1, \\ y(t) = t; \end{cases}$

e) $\begin{cases} x(t) = 2\operatorname{sen} t + t\cos t, \\ y(t) = t\cos t; \end{cases}$ f) $\begin{cases} x(t) = t, \\ y(t) = -3t. \end{cases}$

30.7. a) $x(t) = -\dfrac{t\cos t}{2} + \dfrac{\pi}{4}\cos t + \dfrac{1}{2}\operatorname{sen} t.$

b) $x(t) = C(\operatorname{sen} 4t + 4\cos 4t)$, donde C es arbitraria.

30.8. La condición de transversalidad tiene la forma

$$\frac{\psi' - x'}{1 + \psi' x'} = -1$$

y significa que las extremales deben interseccarse con la curva dada $x = \psi(t)$ formando un ángulo $\pi/4$. 30.9. $x(t) \equiv 0$. 30.10. a) $x(t) = \pm\sqrt{25 - (t - 5)^2}$. Utilizar el problema 30.3. b) $x(t) = \pm\sqrt{8t - t^2}$. Emplear el problema 30.3. 30.11. a) La distancia es igual a $19\sqrt{2}/8$. b) La distancia es igual a $4/\sqrt{5}$. 30.12. a) No. b)

$$x(t) = \begin{cases} \sqrt{3}t & \text{cuando } 0 \leqslant t \leqslant 1, \\ -\sqrt{3}(t-2) & \text{cuando } 1 \leqslant t \leqslant 2, \end{cases}$$

y

$$x(t) = \begin{cases} -\sqrt{3}t & \text{cuando } 0 \leqslant t \leqslant 1, \\ \sqrt{3}(t-2) & \text{cuando } 1 \leqslant t \leqslant 2, \end{cases}$$

30.13. a) Las curvas quebradas, compuestas de segmentos de las rectas $x(t) = t$ y $x(t) \equiv 1$ o de segmentos de las rectas $x(t) \equiv 0$

y $x(t) = t - 1$, realizan el mínimo absoluto. La recta $x(t) = t/2$ realiza el mínimo débil. b)

$$x(t) = \begin{cases} -t & \text{cuando } 0 \leqslant t \leqslant 1, \\ t-2 & \text{cuando } 1 \leqslant t \leqslant 4 \end{cases} \quad \text{y} \quad x(t) = \begin{cases} t & \text{cuando } 0 \leqslant t \leqslant 3, \\ -t+6 & \text{cuando } 3 \leqslant t \leqslant 4, \end{cases}$$

sobre ambas quebradas la funcional alcanza el mínimo absoluto.

30.14.

$$x(t) = \begin{cases} 0 & \text{cuando } -1 \leqslant t \leqslant 0, \\ t & \text{cuando } 0 \leqslant t \leqslant 1. \end{cases}$$

30.15. a) $x(t) = \dfrac{t+1}{2} e^t$; b) $x(t) = 2 \operatorname{sen} \pi n t$, $n = \pm 1, \pm 2, \ldots$; c) $x(t) = 3t^2 + 2t + 1$; d) $x(t) = \dfrac{2t - t^2}{4}$.

30.16. Investigar la funcional para el extremo

$$\int_{t_0}^{t_1} x \sqrt{1 + x'^2}\, dt$$

con la condición

$$\int_{t_0}^{t_1} \sqrt{1 + x'^2}\, dt = l.$$

Obtenemos una familia de extremales $x(t) = C_1 \operatorname{ch} \dfrac{t - C_2}{C_1} - \lambda$. La solución se halla partiendo del sistema de ecuaciones respecto a C_1, C_2, λ:

$$\begin{cases} x_0 = C_1 \operatorname{ch} \dfrac{t_0 - C_2}{C_1} - \lambda, \\ x_1 = C_1 \operatorname{ch} \dfrac{t_1 - C_2}{C_1} - \lambda, \\ C_1 \left[\operatorname{sh} \dfrac{t_1 - C_2}{C_1} - \operatorname{sh} \dfrac{t_0 - C_2}{C_1} \right] = l. \end{cases}$$

30.17. $\begin{cases} x(t) = -\dfrac{5}{2} t^2 + \dfrac{7}{2} t, \\ y(t) = t. \end{cases}$ 30.18. $\begin{cases} x(t) = R \cos \dfrac{\pi}{2} t, \\ y(t) = R \operatorname{sen} \dfrac{\pi}{2} t. \end{cases}$

30.19. a) $\begin{cases} x(t) = \operatorname{sen} 2t, \\ y(t) = \cos 2t + 2t \operatorname{sen} 2t. \end{cases}$

Hallar extremales de la funcional

$$L(x,\ y)=\int\limits_0^{\pi/4}\left[\frac{y^2}{2}-2t^2x^2+\lambda\left(\frac{dx}{dt}-2y+4tx\right)\right]dt.$$

La ecuación de Euler da $y-2\lambda=0$. Excluir y de esta ecuación y de la ecuación de vinculación

b) $x(t)=\dfrac{\operatorname{sh}\sqrt{2}t}{\operatorname{sh}\sqrt{2}}$, $\quad y(t)=\dfrac{\sqrt{2}\operatorname{ch}\sqrt{2}t+\operatorname{sh}\sqrt{2}t}{\operatorname{sh}\sqrt{2}}$.

§ 31.

31.1. a) La solución de la ecuación de Euler tiene la forma $x(t)=C_1\operatorname{ch}t+C_2\operatorname{sh}t$. Las curvas $x(t,\ C)=C\operatorname{ch}t$ forman un campo propio; las curvas $x(t,\ C)=C\operatorname{sh}t$, el campo central. b) $x(t,\ C)=C\cos t$ es el campo propio de extremales, $x(t,\ C)=C\operatorname{sen}t$ es el campo central. 31.2. a) La extremal $x(t)\equiv 1$ se incluye en el campo propio de las extremales $x(t,\ C)=C$. b) La extremal $x(t)=2t$ se incluye en el campo central de las extremales $x(t,\ C)=Ct$ con centro en el punto $A\ (0,\ 0)$. c) La extremal $x(t)=t^2+t/4-3/4$ se incluye en el campo propio de las extremales $x(t,\ C)=t^2+t/4+C$. d) La extremal $x(t)=t/6\ (1-t^2)$ se incluye en el campo central de las extremales $x(t,\ C)=Ct-t^3/6$ con centro en el punto $A\ (0,\ 0)$. e) La extremal $x(t)=e^t$ se incluye en el campo propio de las extremales $x(t,\ C)=e^t+C$. f) Cuando $a<\pi$, la extremal $x(t)\equiv 0$ se incluye en el campo central de las extremales $x(t,\ C)=C\operatorname{sen}t$ con centro en el punto $A\ (0,\ 0)$, cuando $a>\pi$, la familia de las curvas $x(t,\ C)=C\operatorname{sen}t$ no forma campo. g) La extremal $x(t)=t+1$ se incluye en el campo propio de las extremales $x(t,\ C)=t+C$. 31.3. a) Sí. La solución de la ecuación de Jacobi con la condición $u(0)=0$ tiene la forma $u(t)=Ct$, la extremal $x(t)=\dfrac{3}{a}t$ se incluye en el campo central de extremales con centro en el punto $A\ (0,\ 0)$. b) No. La solución de la ecuación de Jacobi con la condición $u(0)=0$ tiene la forma $u(t)=C\operatorname{sen}2t$ y se anula en el punto $t=\pi/2$ cuando $a>\pi/2$. c) Sí. La solución de la ecuación de Jacobi con la condición $u(0)=0$ tiene la forma $u(t)=C\operatorname{sh}t$. d) La solución de la ecuación de Jacobi con la condición $u(0)=0$ tiene la forma $u(t)=C\operatorname{sen}t$; si $0<a<\pi$ la condición de Jacobi está cumplida, y no lo está si $a\geqslant\pi$. e) Sí. f) Sí. g) No. h) Sí. 31.4. Puesto que la ecuación de Euler tiene la forma $F'_{x'}=C$ la condición de Jacobi se cumple idénticamente para cualquier extremal. 31.5. a) La extremal es $x(t)=2t+1$, la condición está cumplida. b) La extremal es $x(t)=t^3$, la condición no está cumplida. c) La extremal es $x(t)\equiv 0$, la condición está cumplida. d) La extremal es $x(t)=\dfrac{b}{a}t$, la condición está cumplida. e) La extremal es $x(t)\equiv 0$, la condición está cumplida. f) La extremal es $x(t)=t/2$, la condición está cumplida. g) La extremal es $x(t)\equiv 3$, la condición está

cumplida. h) La extremal es $x(t) = t^2$, la condición está cumplida. i) La extremal es $x(t) = t - 1$, la condición está cumplida. 31.6. a) $x(t) = 2t$, es un mínimo débil. b) $x(t) = t^2 - t$ es un mínimo fuerte. c) $x(t) = t/2$ es un mínimo fuerte. d) $x(t) = e^t$ es un mínimo fuerte. e) $x(t) = 2\ln(t+1)$ es un mínimo fuerte. f) $x(t) = 1$ es un mínimo fuerte. g) $x(t) = t^2$ es un mínimo débil. h) $x(t) = \frac{b}{a}t$ es un mínimo débil. i) $x(t) = \ln(1+t)/\ln 2$ es un mínimo fuerte. j) $x(t) = 2t + 1$ es un mínimo débil. k) $x(t) = \operatorname{sen} 2t - 1$ es un máximo fuerte. l) $x(t) = t^3$ es un mínimo fuerte. m) $x(t) = \operatorname{sen} 2t$ es un máximo fuerte. n) $x(t) = t/2$ es un mínimo débil. o) $x(t) = 0$ es un mínimo débil.

31.7. b) $d^2\varphi|_{x=0} = \int_0^1 th^2(t)\,dt > 0$ para cualquier $h(t) \in C[0, 1]$, $h(t) \not\equiv 0$. c) Sea

$$x_\varepsilon(t) = \begin{cases} -t + \varepsilon & \text{para } 0 \leqslant t \leqslant \varepsilon, \\ 0 & \text{para } t > \varepsilon. \end{cases}$$

Entonces $\varphi(x_\varepsilon) = +\varepsilon^4/6 < 0$. 31.8. b) $d^2\varphi|_{x=x_0} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{h_n^2}{n^3} > 0$ para cualquier $h \in l_2$ ($h \neq 0$). c) Sea $x^{(n)} = (\underbrace{0, 0, \ldots, 0}_{n-1}, 1/n, 0, 0, \ldots)$. Entonces $\varphi(x^{(n)}) = 1/n^5 - 1/n^4 < 0$.

§ 32.

32.2. $\varphi^2(tx_1 + (1-t)x_2) \leqslant t^2\varphi^2(x_1) + 2t(1-t)\varphi(x_1)\varphi(x_2) + (1-t)^2\varphi^2(x_2) = t\varphi^2(x_1) + (1-t)\varphi^2(x_2) - t(1-t)[\varphi(x_1) - \varphi(x_2)]^2 \leqslant t\varphi^2(x_1) + (1-t)\varphi^2(x_2)$. 32.3. a) Sí. b) Sí. c) En general, no. En el espacio l_2 considerar la sucesión $e_n = (\underbrace{0, 0, \ldots, 0}_{n-1}, 1, 0, 0, \ldots)$. d) Sí. Cuando $x_n \rightharpoonup x_0$ ($n \to \infty$) débilmente y $\|x_0\| > \underline{\lim}\,\|x_n\|$ existe un c tal, que $\|x_0\| > c > \underline{\lim}\,\|x_n\|$ y, por consiguiente, existe una subsucesión x_{n_k} tal, que $\|x_0\| > c > \|x_{n_k}\|$ para $k \in N$. Definimos la funcional f_0: $\langle x_0, f_0\rangle = \|x_0\|$ y la prolongamos sobre todo el X conservando la norma. Entonces $\langle x_{n_k}, f_0\rangle$ no tiende a $\langle x_0, f_0\rangle$, ya que $\langle x_{n_k}, f_0\rangle \leqslant \|f_0\| \cdot \|x_{n_k}\| < c$ mientras que $\langle x_0, f_0\rangle = \|x_0\| > c$ es una contradicción. 32.6. Sea u un punto mínimo local de $\varphi(x)$ sobre M; entonces existe un $\varepsilon > 0$ tal, que para cualquier $v \in S_\varepsilon(u) \cap M$ se cumple la desigualdad $\varphi(u) \leqslant \varphi(v)$. Sean: $x \in M$, arbitrario, y un $\alpha > 0$ tal, que $\alpha\|x - u\| < \varepsilon$. Entonces $u + \alpha(x-u) \in S_\varepsilon(u) \cap M$ y por eso $\varphi(u + \alpha(x-u)) \geqslant \varphi(u)$. Pero $\varphi(u) \leqslant \varphi(u) + \alpha[\varphi(x) - \varphi(u)]$ y como $\alpha > 0$, $\varphi(x) - \varphi(u) \geqslant 0$, y, por consiguiente, u es el mínimo global sobre M. 32.8. No. Considerar $\varphi(x) = \sqrt{|x|}$ para $x \in R$. 32.9. La necesidad se desprende directamente de la semicontinuidad

inferior (débil). Para demostrar la suficiencia, emplear la idea de la resolución del problema 32.3 d). 32.10. De la semicontinuidad débil e inferior se deduce la semicontinuidad inferior sin exigencia auxiliar de convexidad. Si φ es una funcional convexa y semicontinua inferiormente, entonces, según el problema 32.9, el conjunto C_λ es cerrado para cualquier λ real, según el problema 32.7 es convexo, según el problema 13.23 C_λ es débilmente cerrado y en virtud del problema 32.9, φ es semicontinuo débil e inferiormente. 32.12. c) No. No se puede aplicar el teorema 32.1, puesto que el espacio $C[0, 1]$ es no reflexivo. 32.13. Sean $M \subset X$ bicompacto, $\varphi(x)$ definida sobre M y semicontinua débil e inferiormente. Si $m = \inf_{x \in M} \varphi(x)$ y $x_n \in M$ es tal, que $\varphi(x_n) \to m$ cuando $n \to \infty$, existe una subsucesión x_{n_k} tal, que $x_{n_k} \to x_0 \in M$, entonces $\varphi(x_0) = m$. 32.14. $\varphi(x)$ es una funcional convexa continua. 32.15. a) Sí. b), c) Como regla, no. 32.16. $\varphi(tx_1 + (1-t)x_2) = t^2(Ax_1, x_1) + t(1-t)(Ax_1, x_2) + t(1-t)(Ax_2, x_1) + (1-t^2)(Ax_2, x_2) = t\varphi(x_1) + (1-t)\varphi(x_2) - t(1-t)(A(x_1 - x_2), x_1 - x_2)$ y como $t \in [0, 1]$, $t(1-t)(A(x_1 - x_2), x_1 - x_2) \geqslant 0$. 32.17. b) No. Considerar la sucesión $e_n = (\underbrace{0, 0, \ldots, 0}_{n-1}, 1, 0, \ldots) \in l_2$. 32.18. a) $\varphi'(x) = Ax + A^*x$. b) $\langle x - y, \varphi'(x) - \varphi'(y) \rangle = 2\langle x - y, A(x - y) \rangle \geqslant 0$. c) Emplear el teorema 32.2, la continuidad del operador A y el problema 32.11. 32.19. a) $\varphi'(x) = 2A^*(Ax - b)$. b) Demostrar que $\varphi'(x)$ es un operador monótono, emplear el teorema 32.2, la continuidad del operador A y el problema 32.11. 32.20. Cuando $r \geqslant 5$, el valor mínimo de φ equivale a cero y se alcanza en el punto $C(4, 3)$. Cuando $r < 5$, el valor mínimo de φ es igual a $2r^2 - 20r + 50$ y se alcanza en el punto de intersección de $\sigma_r(0)$ con la recta OC.

Bibliografía

1. A. B. Antonévich, P. N. Kniázev, Ya. V. Radiko, Problemas y ejercicios del análisis funcional.
(Антоневич А. Б., Князев П. Н., Радыко Я. В., Задачи и упражнения по функциональному анализу, Минск, Вышэйшая школа, 1978)
2. F. P. Vasiliev, Métodos de resolución de los problemas extremales.
(Васильев Ф. П., Методы решения экстремальных задач, М., Физматгиз, 1981)
3. I. M. Guélfand, S. V. Fomín, Cálculo de variaciones.
(Гельфанд И. М., Фомин С. В., Вариационное исчисление, М., Физматгиз, 1961).
4. A. P. Gurévich, L. B. Zelenko, Compendio de problemas del análisis funcional.
(Гуревич А. П., Зеленко Л. Б., Сборник задач по функциональному анализу, Саратов, Изд-во СГУ, 1978)
5. V. I. Drobishévich, V. P. Dimnikov, G. S. Rivin, Problemas de la matemática de cálculo.
(Дробышевич В. И., Дымников В. П., Ривин Г. С., Задачи по вычислительной математике, М., Наука, 1980)
6. J. Dieudonné, Foundations of modern analysis, Academic Press. New York and London, 1960.
7. L. V. Kantorévich, G. P. Akílov, Análisis funcional en los espacios normados.
(Канторович Л. В., Акилов Г. П., Функциональный анализ в нормированных пространствах, М., Физматгиз, 1959)
8. Tosio Kato, Perturbation theory for linear operators.
9. A. A. Kirílov, A. D. Gvishiani, Teoremas y problemas del análisis funcional.
(Кириллов А. А., Гвишиани А. Д., Теоремы и задачи функционального анализа, М., Наука, 1979)
10. Von Lothar Collatz, Funktionalanalysis und Numerischemathematik, Springer-Verlag, Berlin — Göttingen — Heidelberg, 1964.
11. A. N. Kolmogórov, S. V. Fomín, Elementos de la teoría de las funciones y del análisis funcional.
(Колмогоров А. Н., Фомин С. В., Элементы теории функций и функционального анализа, М., Наука, 1968)
12. M. L. Krasnov, G. I. Makárenko, A. I. Kiseleiov, Cálculo de variaciones.

(Краснов, М. Л., Макаренко Г. И. Киселев А. И., Вариационное исчисление, М., Наука, 1973)
13. M. L. Krasnov, A. I. Kiseliov, G. I. Makárenko, Ecuaciones integrales.
(Краснов М. Л., Киселев А. И., Макаренко Г. И., Интегральные уравнения, М., Наука, 1976)
14. Laurent Pierre-Jean, Approximation et optimisation, Paris, 1972.
15. L. A. Lusternik, V. N. Sóbolev, Elementos del análisis funcional.
(Люстерник Л. А., Соболев В. И., Элементы функционального анализа, М., Наука, 1965)
16. M. A. Náimark, V. V. Martínov, Análisis funcional.
(Наймарк М. А., Мартынов В. В., Функциональный анализ, Долгопрудный, Изд-во МФТИ, 1970)
17. Reed Michael, Simon Barry, Methods of Modern Mathematical Physics, Academic Press, New York, London, 1972.
18. W. Rudin. Functional Analysis.
19. A. A. Samarski. Introducción a la teoría de los esquemas de diferencias.
(Самарский А. А., Введение в теорию разностных схем, М. Наука, 1971)
20. Compendio de problemas del análisis funcional.
(Сборник задач по функциональному анализу, М., Изд-во МГУ, 1977)
21. Compendio de problemas de las ecuaciones de la física matemática.
(Сборник задач по уравнениям математической физики/Под редакцией В. С. Владимирова, М., Наука, 1974)
22. V. I. Sóbolev, Conferencias sobre los capítulos suplementarios del análisis matemático.
(Соболев В. И., Лекции по дополнительным главам математического анализа, М., Наука, 1968)
23. T. S. Sóboleva, Problemas del análisis funcional.
(Соболева Т. С., Задачи по функциональному анализу, М., Изд-во МИНХ и ГП, 1977)
24. A. N. Tíjonov, V. Ya. Arsenin, Métodos de solución de los problemas incorrectos.
(Тихонов А. Н., Арсенин В. Я., Методы решения некорректных задач, М., Наука, 1974)
25. V. A. Trenoguín, Análisis funcional.
(Треногин В. А., Функциональный анализ, М., Наука, 1980)
26. A. I. Fet, Problemas del análisis funcional.
(Фет А. И., Задачи по функциональному анализу, Новосибирск, Изд-во МГУ, 1968)
27. Paul R. Halmos. A Hilbert Space Problem Book, Toronto — London, 1967.
28. G. E. Shílov, Análisis matemático. Funciones de una variable.
(Шилов Г. Е., Математический анализ. Функции одного переменного. Часть 3, М., Наука, 1970)

Lista de símbolos matemáticos

N, conjunto de los números naturales
R, conjunto de los números reales
C, conjunto de los números complejos
$A + B$, suma algebraica de los conjuntos A y B (12)
$\hat{A}$, prolongación del operador A (55)
$\sqrt{A}$, raíz cuadrada del operador A (105)
$\| A \|$, norma del operador A (49)
$| A |$, módulo del operador A (105)
A^+, parte positiva del operador A (105)
A^-, parte negativa del operador A (105)
A^*, operador conjugado a A (79)
A^{-1}, operador inverso de A (61)
A_l^{-1}, operador inverso izquierdo de A (61)
A_r^{-1}, operador inverso derecho de A (61)
C, $\widetilde{L}_p$, espacios de las funciones continuas (16)
C^k, espacio de las funciones k veces continuamente diferenciables (15)
c, espacio de las sucesiones convergentes (15)
c_0, espacio de las sucesiones que tienden a cero (15)
c^m, E^m, l^m, l_p^m, espacios de las columnas de números (14)
diam A diámetro del conjunto A (11)
∂A, frontera del conjunto A (13)
$E(t, x, p, x')$, función de Weierstrass (203)
$F_k x^k$, operador k-potencial (132)
$F_k(x_1, x_2, \ldots, x_k)$, operador k-lineal (131)
$G(s, t)$, función de Green (126)
H, espacio de Hilbert (28)
H^1, H^m, espacios de Sóbolev (36, 188)
I, operador idéntico (54)
K, espacio de las funciones finitas (16)
$K(s, t)$, núcleo de la ecuación integral (117)
L_1, L_2, L_p, espacios de Lebesgue (35, 36)
$L \oplus M$, suma directa de los subespacios L y M (12)
$L(x)$, $L(x, y)$, espacios de operadores lineales acotado, (54)
l_1, l_2, l_p, espacios de las sucesiones de números (14, 15)
M', conjunto de todos los puntos de acumulación del conjunto M (11)

$\overline{M}$, clausura (adherencia) del conjunto M (11)
$M^{\perp}$, complemento ortogonal al conjunto M (28)
$M[a, b]$, espacio de las funciones acotadas (15)
m, espacio de las sucesiones de números (15)
$N(A)$, conjunto de ceros (núcleo) del operador A (49)
$R_{\lambda}(A)$, resolvente del operador A (109)
$r_{\sigma}(A)$, radio espectral del operador A (110)
$S_r(x_0)$, bola abierta con centro en el punto x_0 de radio r (11)
$\overline{S}_r(x_0)$, bola cerrada con centro en el punto x_0 de radio r (11)
$V[a, b]$, espacio de las funciones de variación acotada (16)
$\overset{b}{a}$
$Vx(t)$, variación total de una función (16)
$\overset{a}{}$
X/L, espacio cociente (27)
X^*, espacio dual (67)
X^{**}, segundo espacio dual (76)
$X \dot{+} Y$, suma directa de espacios (65)
$\| x \|$, norma del elemento x (11)
(x, y), producto escalar (27)
$\langle x, f \rangle$, valor de la funcional f para el elemento x (67)
$x \perp y$, elementos ortogonales (28)
$\Gamma(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, determinante de Gram (29)
$\delta F(x_0; h)$, primera variación del operador (192)
$\delta(H)$, conjunto de los operadores autoconjugados (104)
ρ_u, radio de convergencia (132)
$\rho(A)$, conjunto resolvente (109)
$\rho(x, y)$, métrica (distancia entre los puntos) (11, 45)
$\sigma(A)$, espectro del operador A (109)
$\sigma(X)$, $\sigma(X, Y)$, conjunto de los operadores totalmente continuos (90)

Indice alfabético

Angulo de dos elementos 28
Aplicación continua 12
— — en un punto 12
— uniformemente continua 12
Aproximación 155
Ascenso finito 96
Axioma triangular 45

Base ortogonal 29
Bola abierta 11
— cerrada 11

Campo central 202
— de definición de un operador 49
— de extremales 203
— de valores de un operador 49
— propio 202
Casi solución 95
Centro del haz 202
Clausura (adherencia) 11
Coeficiente de contracción 140
Completación 24
Condición de aproximación 155
— de estabilidad 156
— de Legendre 203
Condiciones de transversalidad 194
— de Weierstrass-Erdmann 194
Conjunto abierto 11, 45
— acotado 11
Conjunto bicompacto 83
— cerrado 12, 45
— compacto 83
— convexo 12
— débilmente cerrado 78
— — compacto 84
— de ceros de un operador 49
— de medida nula 35
— equiacotado 83
— equicontinuo 83
— localmente compacto 84
— nunca denso 12
— resolvente 109
— siempre denso 12
Convergencia 12
— débil 75
— — débil 75
— de esquema aproximado 156
— en casi todos los puntos 35
— en media 35
— fuerte 54
— uniforme 54
T-convergencia 155
— en media 158
— uniforme 158
Cubrimiento de un conjunto 83

Derivada de Fréchet 131
— de Gateaux 192
— generalizada 36
Descenso finito 96
Descomposición polar 109
Desigualdad de Cauchy-Buniakovski 28
— de Ptolomeo 30
Determinante de Gram 29
Diámetro de un conjunto 11
Diferencial de Fréchet 131
— de Gateaux 192
Distancia 45
— de un punto a un conjunto 11
— entre conjuntos 11

Ecuación de Euler 193
— de Euler-Poisson 193
— de Jacobi 203
Ecuación integral de Fredholm de primera especie 118
— — — de segunda especie 116
— — de Volterra de primera especie 118
— — — de segunda especie 117
Ecuaciones de primera especie 90
— de segunda especie 91
Elemento de la aproximación óptima 39
Encaje de los espacios normados 24
Esfera 11
Espacio cociente 27
— completo 24
— de Banach 24
— de Hilbert 28
— de Lebesgue 35
— de operadores lineales acotados 54
— de Sóbolev 36
Espacio dual 67
— estrictamente normado 12
— euclídeo 27
— métrico 45
— normado lineal 11
— separable 12
— reflexivo 76
— reticular 158
— unitario 28
Espacios isométricos 24
— isomorfos 24
Espectro de un operador 109
Esquema aproximado 155
— de cuadrados mínimos 177
— de diferencias 162
— de Galiorkin 175
Estabilidad 156
Estimación apriorística 161
Extremal 193
Extremo de una functional 192
— — débil 193
— — fuerte 193
— local 192

Frontera de un conjunto 13
Función de Green 126
— de variación acotada 16
— de Weierstrass 203
— implícita 150
— integrable según Lebesgue 35
Función operador analítica 110
— propia del núcleo 118
Funcional 67
— convexa 208
— lineal 67
— semicontinua débil e inferiormente 208
— — inferiormente 208

Grado de aproximación 155
— de exactitud de un esquema aproximado 156
Gráfico de un operador lineal 65

Hiperplano 67

Identidad de Aplonio 29
Indice de un operador 98
Integral de Lebesgue 35
— de Stieltjes 72
Iteraciones 140

Máximo local 192
Método de cuadrados mínimos 177
— de Galiorkin 184
— de regularización 118
— de Ritz 178
Métrica 45
Mínimo local 192
Multiplicidad de la raíz característica 118

Norma de un elemento 11
— de un operador lineal acotado 49
— de un operador k-lineal 132
Normas concordadas 157
— equivalentes 24
— regulares 157
Núcleo de un operador 49
— — integral 117
Número característico del núcleo 118
— convencional 62
— de ceros 98
— defectivo 98
Números singulares 116

Operador 49
— acotado 49, 131
— analítico 133
— autoconjugado 104
— — no negativo 104
— cerrado 65
— coercitivo 183
— conjugado 79
— continuamente invertible 61
— continuo 49, 131
— — en un punto 49, 131
— contraído 140
— de contracción 155
— de Fredholm 98
— de Hilbert-Schmidt 97
— de proyección 60
— — ortogonal 60
— de Sturm-Liouville 126
— demicontinuo 183
Operador diferenciable en un punto en el sentido de Fréchet 131
— estrictamente monótono 183
— fuertemente monótono 183
— idéntico 54
— implícito 150
— integral de Fredholm 117
— inverso 61
— — derecho 61
— — izquierdo 61
— lineal 49
— — totalmente continuo 90
— k-lineal 131
— — acotado 131
— — simétrico 132
— monótono 183
— no estirante 147
— no lineal totalmente continuo 131
— no negativo 104
— noetheriano 98
— normal 108
— normalmente oluble 98
— nuclear 98
— k-potencial 132
— simétrico 126
— — no negativo 126
— unitario 109
Ortogonalización 28

Parámetro de regularización 118
Pendiente del campo 202
Polar 73
Polinomio de interpolación de Lagrange 43
Problema correcto 118
— incorrecto 118
— isoperímetro 195
— varicional con fronteras movibles 194
Producto escalar 27
Prolongación de un operador 55
Proyección de un elemento 29
Punto angular 194
— de acumulación 11
— fijo 140
— p-límite 176
— regular 109

Radio de convergencia 132
— espectral 110
ε-red 83
Resolvente 109

Segmento 12
Segunda derivada de un operador 132
Serie de Fourier 29
— de Neumann 146
— de Taylor 133
Sistema linealmente independiente 28
— ortogonal 28
— — de polinomios de Chébishev-Laguerre 32
— ortonormalizado 28
Sistemas biortogonales 100
Solución generalizada de un problema de contorno 188
Spline cúbico 172
— de interpolación 169
— lineal 170
Subespacio 12
Sucesión débilmente acotada 76
— — fundamental 76
— fundamental 24
Suma algebraica 12
— directa 12
— — de espacios 65

Valor propio 109
Variación de un operador 192
— total de una función 16
Variedad afín 12
— lineal 12
Vector propio 109

A NUESTROS LECTORES:

Mir edita libros soviéticos traducidos al español, inglés, francés, árabe y otros idiomas extranjeros. Entre ellos figuran las mejores obras de las distintas ramas de la ciencia y la técnica, manuales para los centros de enseñanza superior y escuelas tecnológicas, literatura sobre ciencias naturales y médicas. También se incluyen monografías, libros de divulgación científica y ciencia-ficción.

Dirijan sus opiniones a la Editorial Mir, 1 Rizhski per., 2, 129820, Moscú 1-110, GSP, URRS.

La Editorial « MIR» publicará:

G. Pávlova y A. Fiódorov

Mijail Vasilievich Lomonosov

Este libro está dedicado a la vida y obra del destacado científico ruso del siglo XVIII M. V. Lomonósov, y se basa sobre las obras científicas y documentos de este sabio, así como en trabajos de investigación soviéticos y extranjeros sobre su obra. En el libro se narra acerca de la formación de las ideas científicas del sabio, se muestra su aporte al desarrollo de muchas ramas del saber. El proceso de la formación de Lomonósov se revela sobre el fondo general de la ciencia contemporánea a él, se sigue la relación de su obra con los logros de la ciencia del siglo XVIII, así como la influencia de sus trabajos en el ulterior desarrollo de la ciencia en Rusia y en otros países.

M. V. Lomonósov no sólo fue un brillante científico, sino también un organizador notable de la ciencia. A iniciativa suya fue creada la Universidad de Moscú, se instituyó el primer laboratorio químico científico-didáctico de Rusia; se desarrolló un amplio programa de investigaciones en las esferas de la física, química, geología, geografía y otras ciencias naturales. El fundador de la ciencia rusa se hizo famoso por sus bellas obras poéticas, sus cuadros y mosaicos de gran categoría, por los aparatos e instrumentos científicos creados. La obra de M. V. Lomonósov representa una de las páginas más brillantes en la historia de la ciencia y la cultura rusa.

I. PROSKURIAKOV

Problemas de álgebra lineal

Al componer esta recopilación el autor se planteó la tarea de brindar en primer lugar, un número suficiente de ejercicios para contribuir a la formación de hábitos para solucionar problemas tipo (por ejemplo, cálculo de determinantes con elementos numéricos, la solución de sistemas de ecuaciones lineales con elementos numéricos, etc.); en segundo lugar, ofrecer problemas que contribuyan a la asimilación de las nociones fundamentales y de relaciones mutuas (relación de las propiedades de las matrices con la de las formas cuadráticas, por una parte y, por otra, de las aplicaciones lineales); en tercer lugar, plantear problemas que complementen los cursos teóricos, contribuyendo a la ampliación de los conocimientos matemáticos (propiedades del determinante antisimétrico, propiedades de las matrices asociadas etc.). Algunos capítulos comienzan con introducciones teóricas que contienen breves recomendaciones acerca de la terminología y las designaciones para aquellos casos en que los manuales las interpretan de un modo distinto. Para algunos problemas se dan soluciones o recomendaciones que, como regla, contienen una idea o bien un método de resolución para que los propios estudiantes la desarrollen. Para los problemas más complicados se ofrece un breve plan de resolución.
Este libro está destinado a los estudiantes de universidades e institutos técnicos de enseñanza superior.